



**Уральский  
федеральный  
университет**

имени первого Президента  
России Б. Н. Ельцина

**Институт  
фундаментального  
образования**

**А. А. ПОВЗНЕР  
А. Г. АНДРЕЕВА  
К. А. ШУМИХИНА**

# ФИЗИКА

БАЗОВЫЙ КУРС

Часть I

Учебное пособие



Министерство образования и науки Российской Федерации  
Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

А. А. Повзнер,  
А. Г. Андреева,  
К. А. Шумихина

# **ФИЗИКА**

## **Базовый курс**

### **Часть I**

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом УрФУ  
студентам, обучающимся по инженерно-техническим  
направлениям подготовки и специальностям

Екатеринбург  
Издательство Уральского университета  
2016

УДК 53 (075.8)

ББК 22.3 я73

П42

Рецензенты:

кафедра физики Уральского государственного горного университета (завкафедрой проф., д-р физ.-мат. наук *И. Г. Коршунов*); проф., д-р физ.-мат. наук *А. Д. Ивлиев* (Российский государственный профессионально-педагогический университет).

Научный редактор — проф., д-р физ.-мат. наук *А. В. Мелких*

**Повзнер, А. А.**

П42 Физика. Базовый курс : учебное пособие / А. А. Повзнер, А. Г. Андреева, К. А. Шумихина. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2016. — Ч. 1. — 168 с.

ISBN 978-5-7996-1700-4 (общий)

ISBN 978-5-7996-1701-1 (часть 1)

В основу учебного пособия положен цикл лекций по базовому курсу дисциплины «Физика» модуля «Научно-фундаментальные основы профессиональной деятельности», читаемых на кафедре физики для студентов всех инженерно-технических направлений подготовки и специальностей УрФУ. В нем в краткой и доступной форме излагается курс физики, целью изучения которого является формирование научного мировоззрения, владения физико-математическим аппаратом, методами физических исследований с целью успешного освоения специальных дисциплин. Интегрирование знаний о природе материи и физических законов в смежные науки позволяет студенту рациональнее и эффективнее использовать полученные в ходе обучения компетенции для решения профессиональных задач. Учебное пособие охватывает весь материал первой части базового курса физики и включает следующие разделы: механика, основы молекулярной физики, электричество, магнетизм. Данное учебное пособие предназначено для студентов УрФУ, обучающихся по инженерно-техническим направлениям подготовки и специальностям, изучающих курс физики в соответствии с рабочей программой курса и образовательными стандартами.

УДК 535.13 (075.8)

ББК 22.343 я73

ISBN 978-5-7996-1700-4 (общий)

ISBN 978-5-7996-1701-1 (часть 1)

© Уральский федеральный университет, 2016

## Введение

---

---

**К**урс физики имеет основополагающее значение в формировании у студентов системы базовых знаний об окружающем мире. Фундаментальные законы и понятия, изучаемые в этом курсе, лежат в основе понимания и объяснения множества природных явлений и процессов.

В основу учебного пособия положен цикл лекций по дисциплине «Физика», читаемых на кафедре физики. Данная дисциплина входит в базовый модуль «Научно-фундаментальные основы профессиональной деятельности», который является универсальным для всех инженерно-технических направлений подготовки и специальностей УрФУ. В нем в краткой и доступной форме излагается курс физики, целью изучения которого является формирование научного мировоззрения, владение физико-математическим аппаратом, методами физических исследований для успешного освоения специальных дисциплин. Интегрирование знаний о природе материи и физических законов в смежные науки позволяет студенту рациональнее и эффективнее использовать полученные в ходе обучения компетенции для решения профессиональных задач. Подчеркивается мысль о том, что физика является наукой экспериментальной, поэтому соответствующее внимание уделено историческому аспекту ее развития и тем экспериментам, которые позволяют выявить суть новых открытий и достижений.

Материал данного учебного пособия делится на четыре раздела, что соответствует традиционному изложению курса физики и охватывает весь материал первой части базового курса физики. Вопросы, излагаемые в данном учебном пособии, являются традиционными, в каждом параграфе выделяются основные физические положения, формулы и законы, что позволяет наглядно проследить взаимосвязь физических явлений.

Данное учебное пособие предназначено для студентов УрФУ, обучающихся по инженерно-техническим направлениям подготовки и специальностям и изучающих курс физики в соответствии с рабочей программой курса и федеральными государственными образовательными стандартами.

# 1. Механика

---

---

## 1.1. Кинематика движения материальной точки

---

---

### 1.1.1. Общие понятия

**П**од механическим движением понимают изменение с течением времени взаимного положения тел в пространстве. Для строгости и удобства изложения материала применяют две модели твердых тел — *материальная точка* (м. т.) — тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данного движения, и *абсолютно твердое тело* (а. т. т.) — абсолютно недеформируемое тело или тело, расстояние между двумя любыми точками которого остается постоянным при его движении.

Линию, по которой движется м. т., называют *траекторией движения*, она может быть *прямолинейной* (м. т. движется по прямой линии) или *криволинейной*. Если траектория движения лежит в одной плоскости, то такое движение принято называть *плоским*.

Для м. т. траекторию движения можно представить в виде сложения двух видов движений — по прямой линии и по окружности или как движение по окружностям разных радиусов  $R$  от нуля до бесконечности ( $R \rightarrow \infty$  соответствует прямолинейному движению).

Для а. т. т. вводят два понятия: *поступательное движение* — движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, перемещается параллельно самой себе, и *вращательное движение вокруг неподвижной оси* — движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения.

Любое движение а. т. т. можно свести к сумме двух движений — поступательного и вращательного движений. При поступательном движе-

нии а. т. т. все его точки движутся по одинаковым траекториям, поэтому можно заменить такое движение а. т. т. на движение одной м. т. — его центра масс. Следовательно, поступательное движение а. т. т. не требует отдельного рассмотрения наряду с изучением движения м. т.

### 1.1.2. Система отсчета, радиус-вектор, путь, перемещение, мгновенная скорость движения м. т.

Кинематика — раздел механики, посвященный изучению геометрических свойств движения тел. Для этого прежде всего вводят понятие системы отсчета (С. О.), включающей в себя тело отсчета, связанную с ним систему координат и прибор (часы) для измерения времени (рис. 1.1).

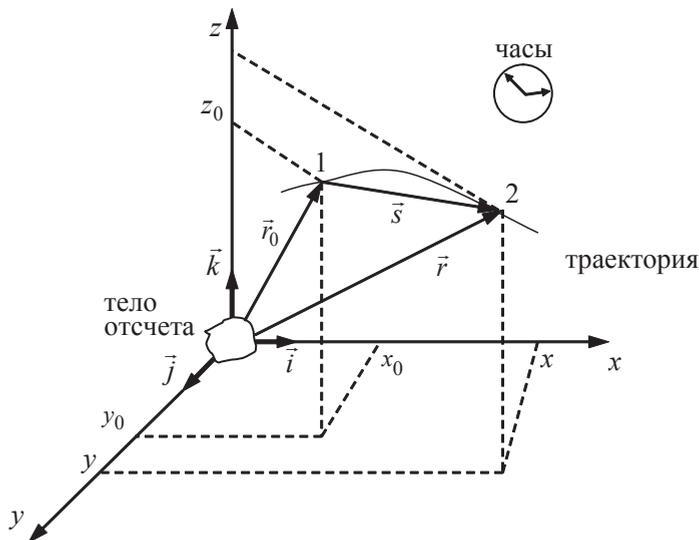


Рис. 1.1

Тогда положение тела в пространстве можно задать либо с помощью радиус-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из начала координат в рассматриваемую точку (для точек 1 и 2 на рис. 1.1 это вектора  $\vec{r}_0$  и  $\vec{r}$ ), либо с помощью координат  $(x, y, z)$  — проекций вектора  $\vec{r}$  на координатные оси

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \quad (1.1)$$

где вектора  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — это вектора, указывающие направления осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  и равные по модулю единице. Вектор  $\vec{S}$ , соединяющий начальное и конечное положение тела (точки 1 и 2 на рис. 1.1), называют перемещением. Он связан с радиус-векторами  $\vec{r}_0$  и  $\vec{r}$  следующим равенством:

$$\vec{S} = \vec{r} - \vec{r}_0. \quad (1.2)$$

Модуль перемещения  $|\vec{S}|$  меньше *пути*  $l$  — расстояния, пройденного телом по криволинейной траектории, и совпадает с пройденным путем в случае прямолинейного движения в одну сторону ( $l = |\vec{S}|$ ).

Для практических целей необходимо определять быстроту движения тела, поэтому вводят *мгновенную скорость*  $\vec{v}$  — скорость тела в данной точке траектории, равную первой производной от радиус-вектора  $|\vec{r}|$  (или перемещения  $\vec{S}$ ) по времени  $t$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{r}'(t) = \vec{S}'(t). \quad (1.3)$$

Вектор  $\vec{v}$  в каждой точке траектории направлен по касательной к ней (рис. 1.2, *a*).

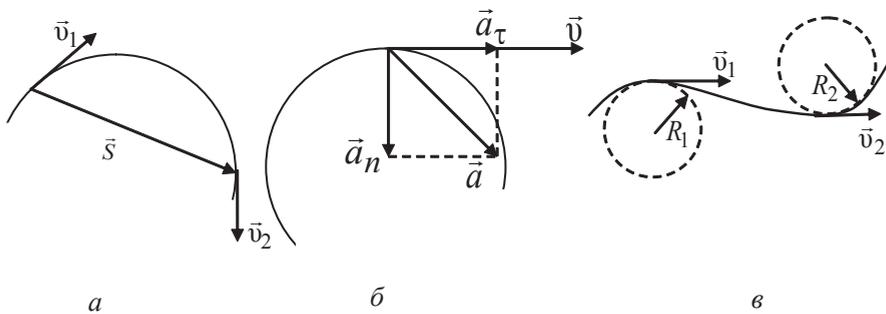


Рис. 1.2

Важной кинематической характеристикой является *средняя путевая скорость*  $v_{cp}$  — скалярная физическая величина, равная отношению пути, пройденного телом за время  $t$ , к этому времени  $t$

$$v_{cp} = \frac{l}{t}. \quad (1.4)$$

### 1.1.3. Мгновенное ускорение м. т.

#### Тангенциальное и нормальное ускорения материальной точки

Быстроту изменения скорости оценивают, вводя понятие *мгновенного ускорения*  $\vec{a}$  — ускорения в данной точке траектории, равного первой производной от скорости  $\vec{v}$  по времени  $t$  или второй производной от радиус-вектора  $\vec{r}$  (или перемещения  $\vec{S}$ ) по времени  $t$ .

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{S}}{dt^2} = \vec{r}''(t) = \vec{S}''(t). \quad (1.5)$$

Проекцию вектора ускорения  $\vec{a}$  на направление касательной к траектории называют тангенциальным (касательным) ускорением  $\vec{a}_\tau$ , а на направление, перпендикулярное к касательной, — нормальным (центростремительным) ускорением  $\vec{a}_n$  (см. рис. 1.2, б).

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}; \quad (1.6)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}; \quad (1.7)$$

где  $v$  — численное значение скорости;  $R$  — радиус кривизны траектории в данной ее точке (он равен радиусу окружности  $R$ , вписанной в малый участок траектории вблизи этой точки (см. рис. 1.2, в)).

Касательное ускорение характеризует изменение скорости тела по ее численной величине (по модулю скорости), а нормальное ускорение — по направлению.

## 1.2. Динамика движения м. т.

Решение кинематических уравнений механического движения тела помимо начальных условий требует информации об ускорении тела. Ее можно получить, рассматривая механическое взаимодействие данного тела с другими телами, приводящее к изменению состояния тела, изменению его скорости, т. е. к возникновению ускорения. Вопросы, связанные с такими взаимодействиями, и рассматриваются в динамике.

### 1.2.1. Сила, инертность тела, масса тела

Для общности рассуждений механическое взаимодействие тела с другими телами описывают понятием силы  $\vec{F}$ , которая определяется как векторная физическая величина, характеризующая механическое взаимодействие данного тела с другим телом (телами), приводящее к их деформации или к возникновению ускорения. Введение силы  $\vec{F}$  позволяет количественно описать такие взаимодействия и выявить в них наиболее важные особенности. С учетом этого о взаимодействии данного тела с другими телами можно сказать так: на тело действует сила  $\vec{F}$ , которая сообщает ему ускорение  $\vec{a}$  или деформирует его.

В механике для характеристики различных видов взаимодействия тел вводят следующие силы: тяготения  $\vec{F}_T$  (частным случаем которой является сила тяжести  $m\vec{g}$ ), упругости  $\vec{F}_y$ , трения  $\vec{F}_{тр}$ , сопротивления  $\vec{F}_c$ , тяги автомобиля  $\vec{F}_{тяги}$ , нормальной реакции опоры  $\vec{N}$ , натяжения  $\vec{F}_y$  нити; вес тела  $\vec{Q}$ , общая реакция опоры  $\vec{R}$  и т. д.

Далее, как показывает опыт, все тела изменяют свою скорость не мгновенно, а постепенно при их взаимодействии с другими телами, т. е. они обладают *инертностью*. Количественной характеристикой инертности тела является его *масса*  $m$ . *Масса* определяется как *мера инертности тела при его прямолинейном движении*.

### 1.2.2. Законы Ньютона

В основе классической механики движения м. т. лежат три закона Ньютона (они не доказываются), которые являются обобщением опытных фактов.

*Первый закон Ньютона* отвечает на вопрос: как движется тело в отсутствие его взаимодействия с другими телами? Согласно первому закону Ньютона *тело покоится или движется равномерно и прямолинейно, если на него не действуют другие тела или их действие скомпенсировано*.

Оказывается, что первый закон Ньютона выполняется не во всех системах отсчета (С. О.). Если выбрать С. О., связанную с поездом, движущимся равномерно и прямолинейно, то шарик, лежащий на гладком

горизонтальном столе в купе вагона, будет покоиться, т. к. действующие на него силы тяжести и нормальной реакции опоры компенсируют друг друга. Однако, если поезд будет двигаться с ускорением, то без видимых причин шарик начнет двигаться относительно поезда, т. е. приобретет ускорение. Поэтому среди всех С. О. выделяют *инерциальные системы отсчета* (ИСО) как С. О., в которых выполняется первый закон Ньютона и соответственно второй и третий законы Ньютона.

ИСО в природе не существует, так как тела отсчета либо вращаются (С. О., связанная с Землей), либо движутся прямолинейно с ускорением. Наиболее близкой к ИСО можно считать систему отсчета, связанную с Солнцем. Для многих физических явлений систему отсчета, связанную с Землей, также можно считать ИСО. В теоретическом плане существует бесконечное множество ИСО, все они движутся равномерно и прямолинейно, т. е. без ускорения, или покоятся.

Ньютон для формулировки второго закона ввел понятие *импульса*  $\vec{p}$  *тела* как векторную физическую величину, характеризующую его прямолинейное движение и равную произведению массы тела на его скорость

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (1.8)$$

Второй закон Ньютона количественно описывает механическое взаимодействие тел, связывая между собой действующую на тело силу с изменением его импульса. *Согласно второму закону Ньютона первая производная от импульса  $\vec{p}$  тела по времени  $t$  равна векторной сумме сил, действующих на тело,*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (1.9)$$

Формула (1.9) позволяет рассматривать движение, при котором масса тела может изменяться (реактивное движение).

Если масса тела не зависит от времени, то тогда выражение (1.9) можно записать, вводя в него ускорение тела

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad (1.10)$$

и сформулировать второй закон Ньютона следующим образом: *произведение массы тела на его ускорение равно векторной сумме сил, действующих на тело.*

Согласно *третьему закону Ньютона силы, действующие между двумя телами, равны по модулю и противоположны по направлению*

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \quad (1.11)$$

На рис. 1.3 приведены примеры сил, входящих в третий закон Ньютона. Эти силы приложены к разным телам, они одинаковой природы, это силы действия и противодействия.

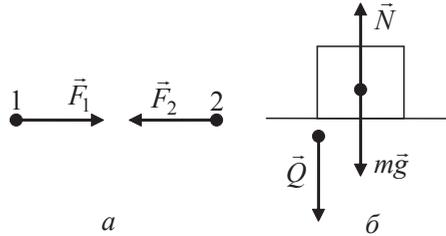


Рис. 1.3

В заключение этого параграфа отметим, что, хотя задача описания механического движения тел решается на основе уравнений (1.9) и (1.10), ее практическая реализация сопряжена с большими сложностями. Так, в частности, во многих случаях не удается установить все силы, действующие на тело, а для известных сил установить их зависимость от координат и времени. К тому же задача о движении трех и более тел не имеет точного решения.

В связи с этим вводят дополнительные величины, такие как импульс  $\vec{p}$ , энергия  $W$ . Оказывается, что для этих величин выполняются законы сохранения, которые позволяют, не решая уравнения второго закона Ньютона, получить неполную, но важную для практических целей информацию о движении взаимодействующих тел.

### 1.2.3. Закон сохранения импульса

Докажем закон сохранения импульса. Для этого рассмотрим систему, состоящую из  $N$  тел (на рис. 1.4 для простоты приведена система из трех тел — м. т.). На каждое тело системы действуют внешние силы  $\vec{F}_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) со стороны не входящих в эту систему тел (м. т.) и внутренние силы  $\vec{f}_{ik}$  ( $i, k=1, \dots, N$ ) со стороны других тел системы. Внутренние силы системы связаны между собой третьим законом Ньютона

$$\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}. \quad (1.12)$$

Запишем уравнения второго закона Ньютона (1.9) для всех тел системы и затем сложим эти уравнения:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{k \neq i} \vec{f}_{ik} + \vec{F}_{0i}, \quad i = 1, \dots, N;$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N) = \sum_{i=1}^N (\sum_{k \neq i} \vec{f}_{ik} + \vec{F}_i) = \sum_{i=1}^N \sum_{k \neq i} \vec{f}_{ik} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i.$$

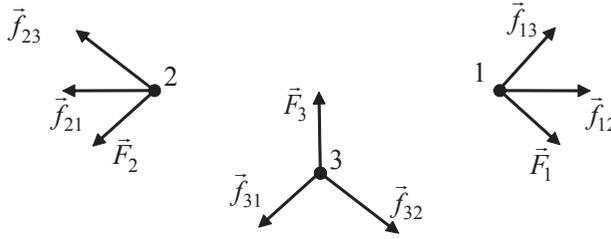


Рис. 1.4

Векторная сумма всех внутренних сил с учетом выражения (1.18) равна нулю и поэтому

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_c = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad (1.13)$$

где введен импульс  $\vec{p}_c$  системы как векторная сумма импульсов тел системы

$$\vec{p}_c = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N. \quad (1.14)$$

Итак, согласно выражению (1.14) векторная сумма импульсов тел системы (или импульс системы) изменяется за счет действия внешних сил.

Если взять *замкнутую систему*, т. е. систему, на которую не действуют внешние силы ( $\vec{F}_i = 0$ ), то тогда выполняется *закон сохранения импульса*, согласно которому *векторная сумма импульсов тел замкнутой системы остается постоянной или импульс  $\vec{p}_c$  замкнутой системы остается постоянным*

$$\vec{p}_c = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N = \text{const}. \quad (1.15)$$

Реально выделить замкнутую систему достаточно трудно, но и в незамкнутых системах в ряде случаев можно использовать закон сохранения импульса. Перечислим их.

1. *Внешние силы компенсируют друг друга.* Такую систему, например, составляют два тела, движущиеся по гладкой горизонтальной поверхности (отсутствуют силы трения) навстречу друг другу. В этом случае внешние силы — силы тяжести  $m_1\vec{g}$ ,  $m_2\vec{g}$ , нормальная реакция опоры  $\vec{N}_1, \vec{N}_2$  компенсируют друг друга, а возникающие при столкновении тел внутренние силы, силы деформации, не могут изменить импульс системы  $\vec{p}_c = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0$ . Из этого следует, что  $m_1 / m_2 = v_2 / v_1$ , т. е. из закона сохранения импульса можно количественно оценить соотношение масс этих тел, их инертность.

2. *Внешние силы не компенсируют друг друга*, но их проекция на какую-либо ось остается равной нулю. Хотя импульс системы изменяется, но его проекция на эту ось сохраняется. Примером такой системы является система, состоящая из двух тел, одно из которых движется по гладкой поверхности со скоростью  $\vec{v}_1$ , а другое падает вертикально вниз со скоростью  $\vec{v}_2$  и испытывает абсолютно неупругое столкновение с первым телом. В результате этого они движутся с одинаковой скоростью  $\vec{v}$ , образуя единое целое.

3. *Внешние силы значительно меньше по модулю внутренних сил, действующих между телами в системе ( $F_i \ll f_{ik}$ ).* Это наблюдается при сильных кратковременных взаимодействиях: удар, выстрел, разрыв снаряда и т. д. В этих случаях изменение импульса каждого тела системы, в основном, определяется внутренними силами системы

$$d\vec{p}_i = \left( \sum_{k \neq i} \vec{f}_{ik} + \vec{F}_i \right) dt = \sum_{k \neq i} \vec{f}_{ik} dt. \quad (1.16)$$

### 1.3. Механическая энергия и работа

В механике изменение механической энергии связано с взаимодействием тел, с работой сил, действующих на тело. Понятие работы играет важную роль в жизни человека, являясь количественной мерой производимых им усилий на обеспечение своей жизнедеятельности.

### 1.3.1. Работа и мощность силы

Под элементарной работой  $dA$ , совершаемой силой  $\vec{F}$  на элементарном перемещении  $d\vec{S}$ , называют величину, равную скалярному произведению вектора силы на вектор элементарного перемещения

$$dA = \vec{F}d\vec{S} = F|d\vec{S}|\cos\alpha = F_S dl, \quad (1.17)$$

где угол  $\alpha$  — угол между векторами силы  $\vec{F}$  и перемещением  $d\vec{S}$  (рис. 1.5, а);  $|d\vec{S}|$  — модуль вектора элементарного перемещения или элементарный путь  $dl$ , пройденный точкой приложения силы.

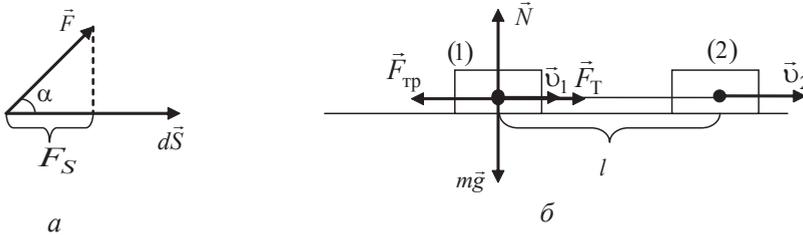


Рис. 1.5

Работа силы на конечном перемещении равна сумме элементарных работ:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F}d\vec{S} = \int_1^2 F \cos\alpha dS. \quad (1.18)$$

Выражению (1.18) можно придать наглядный геометрический смысл. В соответствии с этим равенством значение работы равно площади под графиком зависимости проекции силы на вектор перемещения от пройденного пути. Пусть этот график имеет вид, показанный на рис. 1.6. Из этого рисунка видно, что работа на пути от  $t_1$  до  $t_2$  равна площади под соответствующей кривой. При этом площадь над осью  $S$  берется со знаком плюс (она соответствует положительной работе), а площадь фигуры под осью  $S$  — со знаком минус (она соответствует отрицательной работе).

Если сила постоянна ( $\vec{F} = \text{const}$ ), то ее работа на прямолинейном участке длиной  $l$  запишется следующим образом:

$$A_{12} = Fl \cos \alpha . \quad (1.19)$$

Так, например, работы постоянных сил, приложенных к телу (см. рис. 1.5, б) на горизонтальном участке пути  $l$ , равны:

$$A_N = A_{mg} = 0, \quad A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} l, \quad A_F = Fl .$$

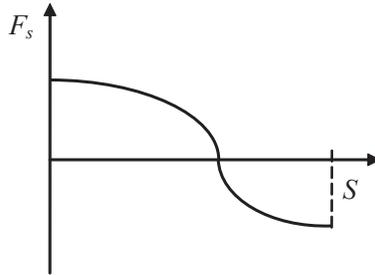


Рис. 1.6

*Мощностью силы* называется скалярная физическая величина, численно равная работе, совершаемой силой в единицу времени. Если за промежуток времени  $dt$  сила  $\vec{F}$  совершила работу  $dA$ , то мощность, развиваемая этой силой в данный момент времени, равна

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \vec{v} = F v \cos \alpha . \quad (1.20)$$

Зная мощность силы, можно найти и работу, которую совершает эта сила за время  $t$ . Действительно,  $dA = P dt$  и, следовательно,

$$A = \int_0^t P dt . \quad (1.21)$$

Напомним размерности работы и мощности в системе СИ:  $[A] = \text{Дж}$ ,  $[P] = \text{Дж/с} = \text{Вт}$ .

### 1.3.2. Кинетическая энергия тела. Теорема о кинетической энергии

Чтобы ввести понятие о кинетической энергии  $W_k$  тела, запишем элементарную работу  $dA$  силы  $\vec{F}$  в другом виде (см. п. 1.2.2):

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m\vec{v}d\vec{v} = m v dv. \quad (1.22)$$

Тогда для работы силы  $\vec{F}$ , переводящей тело из состояния 1 (скорость тела  $\vec{v}_1$ ) в состояние 2 (скорость тела  $\vec{v}_2$ ), можно записать:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_{v_1}^{v_2} m v dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = W_{k_2} - W_{k_1} = \Delta W_k. \quad (1.23)$$

Из полученной формулы следует, что работа силы равна разности двух величин, определяющих начальное (скорость  $\vec{v}_1$ ) и конечное (скорость  $\vec{v}_2$ ) состояния тела. При этом условия перехода из состояния 1 в состояние 2 не оказывают влияние на записанное выражение (1.23). Поэтому можно ввести функцию состояния тела, его кинетическую энергию  $W_k$  как скалярную физическую величину, характеризующую способность тела совершать работу за счет изменения скорости его движения и равную

$$W_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (1.24)$$

Кинетическая энергия тела не зависит от того, как была достигнута данная скорость  $v$ , она является функцией состояния тела, положительной величиной, зависящей от выбора системы отсчета.

Введение  $W_k$  позволяет сформулировать *теорему о кинетической энергии*, согласно которой алгебраическая сумма работ всех сил, действующих на тело, равна приращению кинетической энергии тела:

$$A_1 + A_2 + \dots = \Delta W_k, \quad \sum_i dA_i = dW_k. \quad (1.25)$$

Эта теорема широко используется для анализа взаимодействия тел не только в механике, но и в других разделах курса физики, таких как электростатика, постоянный ток, электромагнетизм, колебания и волны, и т. д.

### 1.3.3. Потенциальная энергия взаимодействующих тел. Теорема о потенциальной энергии

Под *потенциальной энергией*  $W_p$  взаимодействующих тел или частей одного тела понимают СФВ, характеризующую их способность совершать работу за счет изменения взаимного расположения тел или частей одного тела. Потенциальная энергия в одинаковой степени характеризует все взаимодействующие тела или их части. При этом между ними действуют *консервативные силы*, работа которых не зависит от траектории движения тел, но определяется их начальными и конечными положениями.

Потенциальные взаимодействия принято обычно описывать введением силового поля, а именно, считается, что одно тело взаимодействует в месте своего расположения с силовым полем, созданным другими телами. Такой подход удобно использовать в том случае, когда движение одного тела (например, первого) слабо влияет на движение другого тела (второго). Тогда можно считать, что первое тело находится в потенциальном поле, созданном вторым телом, и потенциальную энергию их взаимодействия приписать первому телу. Так, например, говорят о потенциальной энергии тела в поле тяготения Земли, о потенциальной энергии заряда в электрическом поле и т. д. При этом движение тела слабо влияет на силовое поле, в котором оно движется. Вспомним, что обычно говорят: тело падает на Землю, а не Земля падает на тело. Этим самым отмечают тот факт, что движение тела практически не изменяет положение Земли.

Примерами консервативных сил в механике являются силы тяготения и упругости, а неконсервативных сил — силы трения, сопротивления, тяги, силы химических реакций, возникающих при разрыве снаряда, при выстреле и т. д.

Название «консервативные» силы связано с тем, что полная механическая энергия  $W_M$  системы тел, взаимодействующих между собой посредством только консервативных сил, сохраняется.

Выведем формулы для потенциальных энергий взаимодействия тел, между которыми действуют силы тяготения и силы упругости.

1. *Потенциальная энергия тела в поле тяготения Земли.* Между телом (м. т.) массой  $m$  и Землей (однородный шар радиусом  $R_3$ ) массой  $M_3$  действует сила тяготения:

$$F_T = G \frac{mM_3}{r^2}, \quad r \geq R_3,$$

где  $G$  — гравитационная постоянная, а  $r$  — расстояние от центра Земли до тела (рис. 1.7, а).

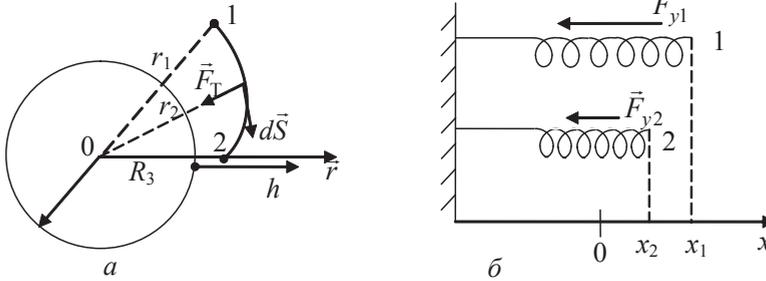


Рис. 1.7

Рассчитаем работу  $A_{12}$  силы тяготения при переходе тела из точки 1 в точку 2 (они находятся соответственно на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от центра Земли, рис. 1.7, а):

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_1^2 \vec{F} d\vec{s} = \int_1^2 F_T |d\vec{r}| \cos \alpha = \int_1^2 F_T |dr| = - \int_1^2 F dr = -GmM_3 \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = \\ &= \left(-\frac{GmM_3}{r_1}\right) - \left(-\frac{GmM_3}{r_2}\right). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Из формулы (1.26) следует, что работа силы тяготения определяется убылью величин, зависящих только от начального и конечного положения тела и Земли. Значит, силы тяготения являются консервативными силами, а сами эти величины представляют собой потенциальные энергии гравитационного взаимодействия тела и Земли:

$$W_p = -G \frac{mM_3}{r} + \text{const}. \quad (1.27)$$

Потенциальная энергия  $W_p$  определяется с точностью до постоянной величины; ее нулевой уровень отсчета  $W_p$  выбирается произвольно для удобства решения конкретных задач. Можно этот выбор провести следующим образом: считать, что при  $r \rightarrow \infty$   $W_p \rightarrow 0$

$$W_p = -G \frac{mM_3}{r}, \quad r \geq R_3.$$

Как уже отмечалось выше, формулу (1.27) можно так же рассматривать как потенциальную энергию тела в гравитационном поле, созданном Землей. В этом случае нулевой уровень отсчета  $W_p$  удобно выбирать на поверхности Земли ( $h = 0, W_p = 0$ ):

$$W_p = G \frac{mM_3}{R_3 r} (r - R_3) = mg_0 h \frac{R_3}{R_3 + h}.$$

В случае если  $h \ll R_3$ , получим  $W_p = mg_0 h$ , где  $g_0 = GM_3/R_3^2 = 9,81 \text{ м/с}^2$  — ускорение свободного падения на уровне океана ( $h = 0, r = R_3$ );  $h$  — высота тела над поверхностью Земли.

## 2. Потенциальная энергия упругодеформированного тела

Рассмотрим работу силы упругости при сжатии пружины из состояния 1 до состояния 2 (см. рис. 1.7, б) с координатами  $x_1$  и  $x_2$  соответственно

$$A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F_y |d\vec{s}| \cos \alpha = - \int_{x_1}^{x_2} F_y dx = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}. \quad (1.28)$$

Из выражения (1.28) следует, что сила упругости является консервативной силой, а величина  $W_p = \frac{kx^2}{2}$  является суммарной взаимной потенциальной энергией всех частей упругодеформированного тела.

Обобщая формулы (1.26) и (1.28), можно сформулировать теорему о потенциальной энергии: работа консервативных сил, действующих между телами или частями одного тела, равна убыли их взаимной потенциальной энергии.

Для тела, движение которого слабо влияет на движение другого тела, создающего силовое поле, *теорему о потенциальной энергии* можно сформулировать так: *работа консервативных сил, действующих на тело, равна убыли потенциальной энергии тела в поле этих сил:*

$$\sum_i dA_{\text{конс}} = -\Delta W_p, \quad dA_{\text{конс}} = -dW_p. \quad (1.29)$$

### 1.3.4. Формула, выражающая связь между консервативной силой и градиентом потенциальной энергии

Между консервативной силой  $\vec{F}_k$ , действующей между телами, и потенциальной энергией их взаимодействия  $W_p$  существуют определенные формулы взаимосвязи, установим их. Для этого распишем выражение для элементарной работы консервативной силы вдоль произвольного направления  $\vec{r}$  ( $|d\vec{s}| = |d\vec{r}| = dr > 0$ ) и подставим его в формулу (1.29). Тогда

$$dA_{\text{конс}} = F_{kr} dr = -dW_p, \quad F_{kr} = -\frac{dW_p}{dr}.$$

Выбирая направление  $\vec{r}$ , совпадающее с направлениями координатных осей, можно оценить проекции силы  $\vec{F}$  на эти оси и тем самым записать формулу взаимосвязи вектора силы  $\vec{F}_k$  и потенциальной энергии  $W_p$ :

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial W_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial W_p}{\partial z},$$

$$\vec{F}_k = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = -\left( \frac{\partial W_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial W_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial W_p}{\partial z} \vec{k} \right).$$

Вспомним некоторые математические термины. Пусть  $\varphi$  — скалярная функция координат  $x, y, z$ . Вектор с компонентами  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$  называется *градиентом функции*  $\varphi$  и обозначается символом  $\text{grad } \varphi$ :

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}.$$

Вектор  $\text{grad } \varphi$  направлен в сторону возрастания величины  $\varphi$ , а по модулю равен приращению этой величины на единичном расстоянии.

С учетом вышесказанного консервативную силу можно представить в виде

$$\vec{F}_k = -\text{grad } W_p, \quad |\text{grad } W_p| = \frac{dW_p}{dl}, \quad (1.30)$$

и, следовательно, консервативная сила равна градиенту потенциальной энергии частицы, взятому с обратным знаком.

Итак, согласно выражению (1.30) консервативная сила, действующая между телами, в каждой точке пространства равна по модулю и противоположна по направлению градиенту потенциальной энергии взаимодействия этих тел.

### 1.3.5. Механическая энергия системы тел.

#### Закон сохранения и изменения механической энергии

*Полной механической энергией*  $W_m$  системы тел называют сумму кинетической энергии тел и потенциальной энергии их взаимодействия:

$$W_m = W_k + W_p. \quad (1.31)$$

Для замкнутой системы из факта неуничтожимости движения материи справедлив закон сохранения всех видов энергий (механической, тепловой, электромагнитной, ядерной и т. д.)

$$W_m + W_{\text{тепл}} + W_{\text{эл}} + W_{\text{яд}} + \dots = \text{const}.$$

В такой системе механическая энергия может изменяться за счет работы неконсервативных сил: они переводят ее в другие виды энергии (механическая энергия уменьшается, происходит ее диссипация, рассеяние), и, наоборот, другие виды энергии переходят в механическую энергию (она возрастает).

Покажем это, используя теоремы о кинетической энергии (1.25) и потенциальной энергии (1.28),

$$\Delta W_m = \Delta(W_k + W_p) = \Delta W_k + \Delta W_p = (A_{\text{конс}} + A_{\text{неконс}}) + (-A_{\text{конс}}) = A_{\text{неконс}},$$

$$\Delta W_m = A_{\text{неконс}}. \quad (1.32)$$

Среди всех неконсервативных сил выделяют *диссипативные силы* — это силы, которые приводят к уменьшению механической энергии системы. К ним, например, относят силы трения и сопротивления. Так, например, шарик, катящийся по горизонтальной поверхности, с течением времени останавливается из-за того, что работа силы трения переводит часть его механической энергии в тепловую энергию

$$\Delta W_m = \Delta W_k + \Delta W_p = \Delta W_k = A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} l < 0 .$$

Если же в замкнутой системе действуют только консервативные силы (такая система называется *замкнутой консервативной системой* — з. к. с.), то тогда в ней выполняется *закон сохранения механической энергии*, который гласит: *механическая энергия замкнутой консервативной системы остается постоянной*

$$W_m = \text{const} . \quad (1.33)$$

Если такая система, между телами которой действуют только консервативные силы, находится во внешнем поле консервативных сил (открытая консервативная система — о. к. с.), то и для нее выполняется закон сохранения механической энергии.

### 1.3.6. Применение законов сохранения импульса и механической энергии к анализу абсолютно упругого и неупругого столкновений

Как уже отмечалось ранее, законы сохранения позволяют получить важную информацию о взаимодействии тел без детального решения второго закона Ньютона. Рассмотрим ряд важных для практики примеров.

1. *Абсолютно неупругий удар* — это удар, в результате которого тела после соударения движутся вместе как единое целое. Пусть движущееся со скоростью  $\vec{v}_1$  тело массой  $m_1$  сталкивается с движущимся со скоростью  $\vec{v}_2$  телом массой  $m_2$ , в результате чего их скорость оказывается равной  $\vec{u}$  (рис. 1.8).

Если эти тела образуют замкнутую систему, то для нее можно записать закон сохранения импульса

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u} , \quad (1.34)$$

из которого следует, что скорость  $\vec{u}$  тел после удара будет равна

$$\vec{u} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} , \quad u = \frac{1}{m_1 + m_2} \sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 + 2m_1 v_1 m_2 v_2 \cos \alpha} . \quad (1.35)$$

При таком ударе возникают неконсервативные силы (силы сопротивления), которые переводят часть механической энергии соударяющихся тел в тепловую энергию

$$\begin{aligned}
 A_{\text{сопр}} = \Delta W_k &= \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} = \\
 &= -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha), \quad (1.36)
 \end{aligned}$$

где угол  $\alpha$  в выражениях (1.35) и (1.36) — угол между векторами  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ .

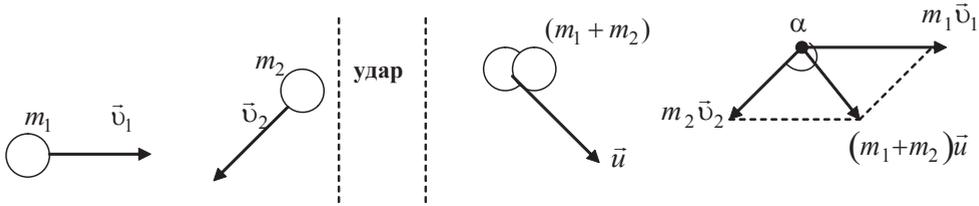


Рис. 1.8

В качестве примера рассмотрим взаимодействие молота (масса  $m_1$ , скорость его в момент удара  $\vec{v}_1$ ) и наковальни (масса  $m_2 \gg m_1$ ,  $\vec{v}_2 = 0$ ) при ковке куска металла. Из формул (1.35) и (1.36) получим

$$\begin{aligned}
 \vec{u} &= \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}, \quad A_{\text{сопр}} = \Delta W_M = -\frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)}, \\
 \eta &= \frac{|\Delta W_M|}{W_{M_1}} = \frac{|A_{\text{сопр}}|}{W_{M_1}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.37)
 \end{aligned}$$

Как следует из выражения (1.37), КПД  $\eta$  удара тем выше, чем больше различие в массах наковальни и молота. В этом случае большая доля механической энергии молота переходит во внутреннюю энергию куска металла и идет на его деформацию.

2. *Абсолютно упругий центральный удар* — это удар, при котором, помимо закона сохранения импульса, выполняется также и закон сохранения механической энергии. При таком ударе деформации тел, возникающие в момент соударения, после столкновения полностью исчезают. При центральном ударе тела до и после соударения движутся по одной прямой.

Пусть движущееся вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $\vec{v}_1$  тело массой  $m_1$  сталкивается с движущимся вдоль или против оси  $Ox$  со скоростью  $\vec{v}_2$  те-

лом массой  $m_2$  ( $v_1 > v_2$ ), в результате чего их скорости оказываются равными  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  (рис. 1.9).

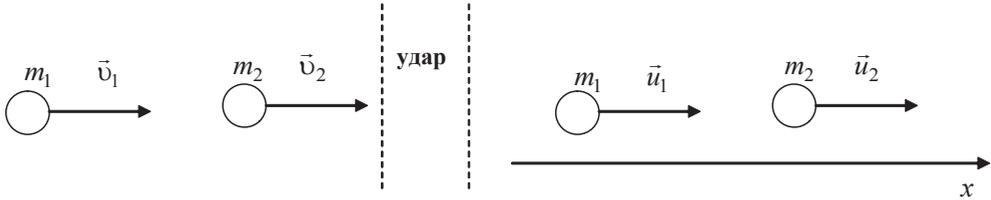


Рис. 1.9

Запишем для данной системы законы сохранения импульса и механической энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2};$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2.$$

Решая систему данных уравнений, можно получить выражение для проекции скоростей  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  тел на ось  $Ox$  после их соударения

$$u_{1x} = \frac{2m_2 v_{2x} + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}, \quad u_{2x} = \frac{2m_1 v_1 + (m_1 - m_2)v_{2x}}{m_1 + m_2}. \quad (1.38)$$

Рассмотрим ряд важных для практики частных случаев использования формул (1.38).

**Пример 1.** Два тела одинаковой массы ( $m_1 = m_2$ ), движущиеся вдоль оси  $Ox$  со скоростями  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  ( $v_1 > v_2$ ) навстречу друг другу ( $v_{1x} = v_1$ ,  $v_{2x} = -v_2$ ), испытывают упругое соударение, в результате которого согласно формуле (1.38) происходит обмен их скоростями:  $u_{1x} = v_{2x} = -v_2$ ,  $u_{2x} = v_1$ . При  $v_2 = 0$  получим, что скорость первого тела за одно соударение снизится до нуля:  $u_{1x} = 0$ .

**Пример 2.** Тело массой  $m_1$ , движущееся со скоростью  $\vec{v}_1$ , упруго ударяется о неподвижное тело, масса которого существенно больше  $m_1$  ( $\vec{v}_2 = 0$ ,  $m_2 \gg m_1$ ). Согласно формулам (1.38) после столкновения первое тело будет двигаться в обратном направлении с той же по модулю скоростью, а второе тело практически останется неподвижным ( $u_{1x} = -v_1$ ,  $u_{2x} \approx 0$ ). Такое столкновение происходит, например, при

лобовом ударе молекулы о стенку сосуда. При этом молекула упруго (без потери скорости) отскакивает обратно, а стенка остается практически неподвижной. Результаты такого столкновения молекулы со стенкой сосуда используются при выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории для давления идеального газа.

#### 1.4. Кинематика вращательного движения материальной точки и абсолютно твердого тела

Как уже упоминалось выше, основной задачей кинематики является определение состояния материальной точки (м. т.) или абсолютно твердого тела (а. т. т.) в произвольный момент времени  $t$ .

Для описания *вращательного движения материальной точки и абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси* необходимо ввести новые понятия и определения, которые значительно упрощают и облегчают решение этой задачи.

##### 1.4.1. Кинематические характеристики вращательного движения материальной точки и абсолютно твердого тела

Пусть м. т. движется со скоростью  $v$  по окружности радиуса  $r$  вокруг неподвижной оси вращения (рис. 1.10, *a*). Материальную точку с осью вращения соединяет перпендикулярный к ней вектор  $\vec{r}$ , а вектор его элементарного приращения, вектор  $d\vec{r}$ , направлен по касательной к окружности.

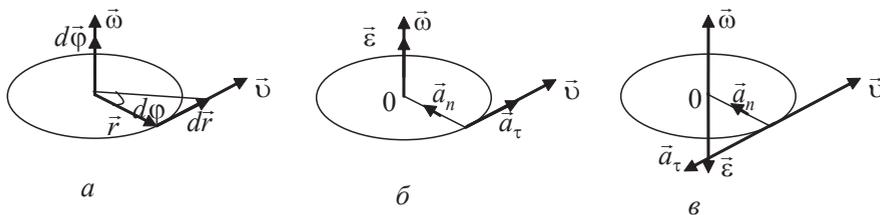


Рис. 1.10

Введем понятие вектора элементарного углового перемещения  $d\vec{\varphi}$ : он равен по модулю углу элементарного поворота  $d\varphi$ , причем  $d\varphi > 0$ ; направлен вектор  $d\vec{\varphi}$  по оси вращения и связан с направлением вращения правилом правого буравчика (правого винта), а именно, направление вращения буравчика должно совпадать с направлением вращения м. т., тогда поступательное движение буравчика определяет направление вектора  $d\vec{\varphi}$  (см. рис. 1.10, *a*).

Быстроту вращения м. т. характеризует *угловая скорость*  $\vec{\omega}$ , равная первой производной от вектора углового перемещения  $\vec{\varphi}$  по времени  $t$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (1.39)$$

Направления вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$  и вектора элементарного углового перемещения  $d\vec{\varphi}$  совпадают.

Быстроту изменения угловой скорости характеризует *вектор углового ускорения*  $\vec{\varepsilon}$ , равный первой производной от угловой скорости  $\vec{\omega}$  по времени

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \quad (1.40)$$

В случае ускоренного вращения направления  $\vec{\varepsilon}$  и  $\vec{\omega}$  совпадают (см. рис. 1.10, *б*), для замедленного вращения вектора  $\vec{\varepsilon}$  и  $\vec{\omega}$  направлены в противоположные стороны (см. рис. 1.10, *в*).

Кроме приведенных выше величин, для описания вращательного движения м. т. используют *частоту обращения*  $n$ , определяемую как число оборотов, совершаемых телом за единицу времени, и *период обращения*  $T$  — *время одного полного оборота*. Справедливы следующие формулы взаимосвязи  $\omega$ ,  $n$  и  $T$ :

$$\omega = 2\pi n = 2\pi / T.$$

Введенные характеристики вращательного движения м. т. применимы и для абсолютно твердого тела, так как его можно разбить на малые объемы и тем самым представить в виде совокупности м. т.

Если задать начальные условия ( $t = t_0$ :  $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0, \vec{\omega} = \vec{\omega}_0$ ) и зависимость углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$  от времени  $t$ , то тогда для векторов углового перемещения  $\vec{\varphi}$  и угловой скорости  $\vec{\omega}$  можно записать

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \int_{t_0}^t \vec{\omega} dt, \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \int_{t_0}^t \vec{\varepsilon}(t) dt. \quad (1.41)$$

Для вращения тела с постоянным угловым ускорением формула (1.41) примет следующий вид ( $t_0 = 0$ ):

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} \cdot t, \quad \vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\varepsilon} \cdot t^2}{2}. \quad (1.42)$$

Для углового пути  $\varphi$  и модуля угловой скорости  $\omega$  в случаях равноускоренного (знак “+”) и в случае равнозамедленного (знак “-”) вращения получаем ( $\varphi_0 = 0$ )

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\omega_0 + \omega}{2} t = \frac{|\omega^2 - \omega_0^2|}{2\varepsilon}, \quad \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t. \quad (1.43)$$

Можно отметить, что формулы (1.43) переходят в формулы кинематики поступательного движения при следующей замене:  $\varphi \rightarrow l$ ,  $\omega \rightarrow v$ ,  $\varepsilon \rightarrow a = a_\tau$ . Этой аналогией можно пользоваться при записи формул для вращательного движения тел.

#### 1.4.2. Формулы, выражающие связь между линейными и угловыми характеристиками при вращательном движении

Исходя из определения векторного произведения двух векторов и рис 1.10,  $a$  можно записать

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \times \vec{r}]. \quad (1.44)$$

Выражение (1.44) позволяет получить следующие формулы взаимосвязи линейных и угловых характеристик:

1) для скоростей  $\vec{v}$  и  $\vec{\omega}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{[d\vec{\varphi} \times \vec{r}]}{dt} = \left[ \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} \right] = [\vec{\omega} \times \vec{r}],$$

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}], \quad v = \omega r; \quad (1.45)$$

2) для ускорений  $\vec{a}_\tau$ ,  $\vec{a}_n$  и  $\vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{\omega} \times \vec{v}] = \left[ \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right] + \left[ \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times \vec{v}] = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}], \quad a_\tau = \varepsilon r, \quad (1.46)$$

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega} \times \vec{v}], \quad a_n = \omega v = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R. \quad (1.47)$$

Направления векторов  $\vec{a}_\tau$  и  $\vec{a}_n$  показаны на рис. 1.10, б — ускоренное вращение м. т. ( $\vec{a}_\tau \uparrow \uparrow \vec{v}$ ,  $\vec{\varepsilon} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$ ) и рис. 1.10, в — замедленное вращение м. т. ( $\vec{a}_\tau \uparrow \downarrow \vec{v}$ ,  $\vec{\varepsilon} \uparrow \downarrow \vec{\omega}$ ).

## 1.5. Динамика вращательного движения

### 1.5.1. Момент инерции м. т. и а. т. т. относительно оси вращения. Теорема Штейнера

Моментом инерции  $I$  материальной точки и абсолютно твердого тела относительно оси вращения называют скалярную физическую величину, являющуюся мерой инертности м. т. и а. т. т. при их вращательном движении. Момент инерции зависит не только от массы  $m$  тела, но и от ее распределения относительно оси вращения.

Момент инерции материальной точки массой  $m$ , вращающейся по окружности радиуса  $r$  (рис. 1.11, а), равен

$$I = mr^2. \quad (1.48)$$

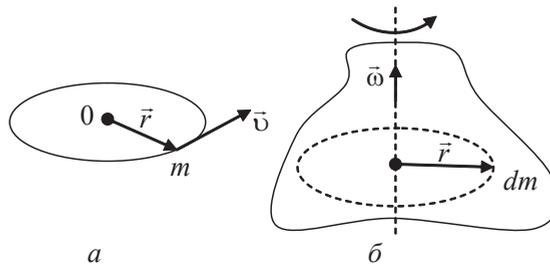


Рис. 1.11

Абсолютно твердое тело объема  $V$  можно представить как совокупность материальных точек (бесконечно малых элементов) массой  $dm$ . Тогда момент инерции  $I$  а. т. т. относительно оси вращения (рис. 1.11, б)

равен сумме моментов инерции каждой материальной точки (каждого бесконечно малого элемента) относительно данной оси вращения или по-другому

$$I = \int_V r^2 dm. \quad (1.49)$$

Обычно момент инерции тела рассматривают относительно осей, проходящих через его *центр тяжести*. Центр тяжести — это точка приложения силы тяжести, действующей на тело. Для определения положения центра тяжести а. т. т. произвольной формы пользуются тем, что через него проходят оси вращения, относительно которых векторная сумма моментов сил тяжести, действующих на разные части тела, равна нулю. Центр тяжести однородных тел правильной геометрической формы совпадает с их геометрическим центром.

Приведем моменты инерции  $I$  некоторых тел правильной геометрической формы относительно оси вращения  $OO_1$ , проходящей через их центр тяжести так, как показано на рис. 1.12.

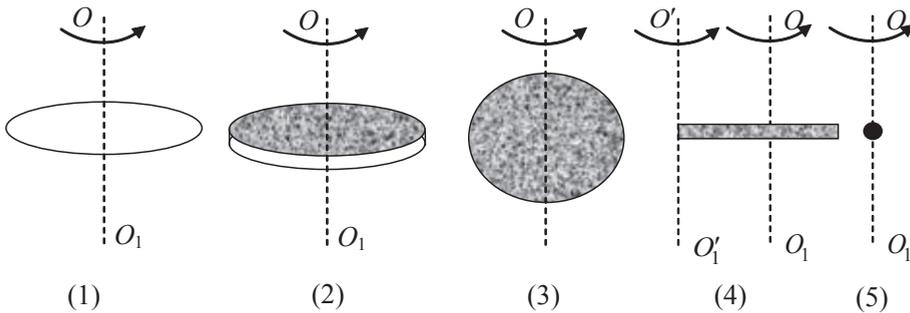


Рис. 1.12

1. Момент инерции обруча (или тонкостенного цилиндра) массой  $m$  и радиусом  $r$  (рис. 1.12, случай 1)

$$I = \int_V r^2 dm = r^2 \int_V dm = mr^2. \quad (1.50)$$

2. Момент инерции сплошного однородного диска (или цилиндра) массой  $m$ , радиусом  $R$  и имеющего высоту  $h$  (рис. 1.12, случай 2)

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV = \int_V r^2 \rho 2\pi r h dr = 2\pi \rho \cdot h \frac{R^4}{4} = \left[ \rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 h} \right] = \frac{1}{2} mr^2, \quad (1.51)$$

где  $\rho$  — плотность материала диска,  $dV = 2\pi rh dr$  — элементарный объем тела, выбираемый в виде кольцевого слоя радиусом  $r$ , толщиной  $dr$  и высотой  $h$ .

3. Момент инерции однородного шара массой  $m$  и радиусом  $r$  (см. рис. 1.12, случай 3)

$$I = \frac{2}{5}mr^2. \quad (1.52)$$

4. Момент инерции тонкого однородного стержня массой  $m$  и длиной  $l$  относительно оси вращения  $OO_1$ , проходящей через его центр тяжести (см. рис. 1.12, случай 4)

$$I = \frac{1}{12}ml^2. \quad (1.53)$$

5. Момент инерции материальной точки массой  $m$  относительно оси вращения, проходящей через данную точку (см. рис. 1.12, случай 5),  $I = 0$ , так как  $r = 0$ .

Для расчета момента инерции тела относительно произвольной оси вращения можно воспользоваться *теоремой Штейнера*: момент инерции тела  $I'$  относительно произвольной оси вращения равен сумме момента инерции  $I$  относительно параллельной ей оси, проходящей через его центр тяжести, и произведения массы тела на квадрат расстояния между этими осями.

$$I' = I + ma^2, \quad (1.54)$$

где  $I, I'$  — моменты инерции тела массой  $m$  относительно двух осей — оси, проходящей через центр масс тела ( $I$ ), и параллельной ей оси ( $I'$ ), отстоящей от нее на расстоянии  $a$ .

С помощью теоремы Штейнера вычислим момент инерции  $I'$  тонкого стержня относительно оси  $O'O'_1$ , проходящей через один из его концов (см. рис. 1.12, случай 4)

$$I' = I + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)ml^2 = \frac{1}{3}ml^2. \quad (1.55)$$

### 1.5.2. Момент силы относительно оси вращения. Основной закон динамики вращательного движения

Пусть к материальной точке массой  $m$  приложена сила  $\vec{F}$ , вызывающая вращение данной точки. При этом вращение будет вызывать только  $\vec{F}_\perp$  (составляющая силы  $\vec{F}$ , перпендикулярная оси вращения) (рис. 1.13), а  $\vec{F}_\parallel$  (составляющая силы  $\vec{F}$ , параллельная оси вращения) вызывает только поступательное движение. *Моментом силы  $\vec{F}$  относительно оси вращения* называют вектор  $\vec{M}$ , равный векторному произведению вектора  $\vec{r}$ , соединяющего м. т. с осью вращения и перпендикулярного этой оси, и вектора силы  $\vec{F}$

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}], \quad M = rF_\perp \sin \alpha = F_\perp d, \quad \alpha = (\vec{r}, \vec{F}_\perp), \quad (1.56)$$

где ось вращения проходит через т. О перпендикулярно к вектору  $\vec{r}$ ;  $d = r \sin \alpha$  — плечо силы — кратчайшее расстояние от линии действия силы до оси вращения;  $\vec{F}_\perp$  — составляющая силы  $\vec{F}$ , перпендикулярная оси вращения.

Направление вектора момента силы  $\vec{M}$  определяется *по правилу буравчика*: вращательное движение буравчика должно совпадать с направлением кратчайшего поворота от  $\vec{r}$  к  $\vec{F}$ , тогда его поступательное движение дает направление вектора  $\vec{M}$ . Таким образом, находим, что вектор  $\vec{M}$  *направлен вдоль оси вращения*.

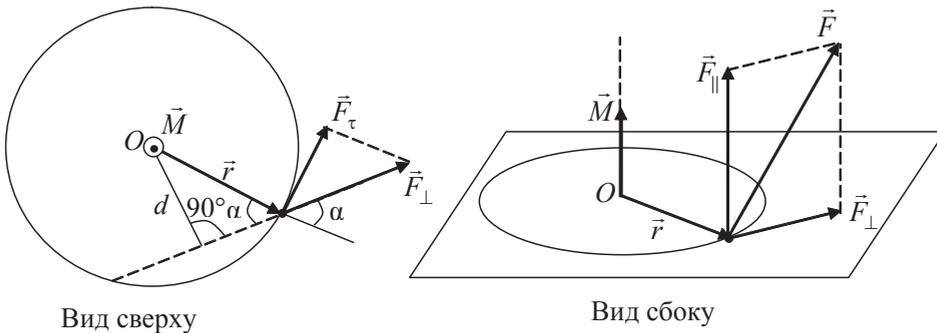


Рис. 1.13

Запишем другое выражение для модуля вектора  $\vec{M}$ , используя проекцию  $\vec{F}_\tau$  силы  $\vec{F}_\perp$  на направление касательной к окружности ( $\vec{F}_\tau = \vec{F}_\perp \sin \alpha$ , см. рис. 1.13); именно сила  $\vec{F}_\tau$  и вызывает вращательное движение м. т.

$$\vec{M} = r\vec{F}_\tau \sin \alpha = rF_\tau = rma_\tau = rmr \cdot \varepsilon = m \cdot r^2 \varepsilon = I \cdot \varepsilon. \quad (1.57)$$

Для абсолютно твердого тела, представляющего собой совокупность материальных точек массой  $dm$ , помимо векторной суммы моментов внешних сил  $\vec{M}$ , действующих на него, между м. т. этого тела действуют также и внутренние силы. Причем векторная сумма моментов внутренних сил относительно оси вращения согласно третьему закону Ньютона равна нулю, поэтому

$$\vec{M} = \int_V d\vec{M} = \int_V dmr^2 \vec{\varepsilon} = I \vec{\varepsilon}.$$

В итоге можно записать *основной закон динамики вращательного движения для абсолютно твердого тела*, который формулируется следующим образом: произведение момента инерции тела относительно оси вращения на вектор углового ускорения равно векторной сумме моментов действующих на тело внешних сил относительно этой оси вращения.

$$I \vec{\varepsilon} = \vec{M}. \quad (1.58)$$

Напомним, что момент инерции а. т. т. не может быть изменен внутренними силами системы ( $I = \text{const}$ ), чего нельзя сказать о системе, состоящей из нескольких а. т. т. (возникающие при этом эффекты будут рассмотрены дальше).

Уравнение (1.58) позволяет при задании начальных условий и действующих относительно оси вращения на а. т. т. моментов внешних сил решать задачи динамики вращательного движения а. т. т.

### 1.5.3. Момент импульса м. т. и а. т. т. относительно оси вращения

*Моментом импульса* м. т. массой  $m$ , движущейся со скоростью  $\vec{v}$  относительно оси вращения, называют вектор  $\vec{L}$ , определяемый вектор-

ным произведением вектора  $\vec{r}$ , соединяющего м. т. с осью вращения и перпендикулярного к этой оси, и вектора импульса тела  $\vec{p}$  (рис. 1.14, а).

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}], \quad L = rp \sin \alpha = rp. \quad (1.59)$$

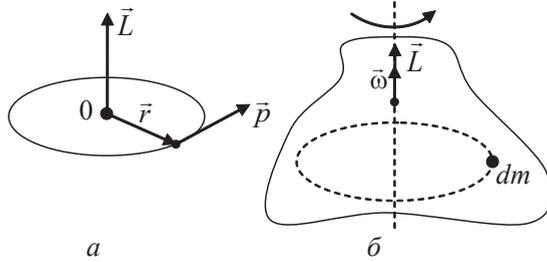


Рис. 1.14

Направлен вектор  $\vec{L}$  по оси вращения согласно правилу буравчика (если вращательное движение буравчика совпадает с направлением кратчайшего поворота от  $\vec{r}$  к  $\vec{p}$ , то его поступательное движение определит направление  $\vec{L}$ ).

Запишем модуль момента импульса  $\vec{L}$  в другом виде:

$$L = rp = r m v = r m \omega r = (m r^2) \cdot \omega = I \omega. \quad (1.60)$$

Т. к. абсолютно твердое тело объема  $V$  представляет собой совокупность м. т. массой  $dm$ , то его модуль момента импульса относительно оси вращения равен сумме моментов импульсов всех материальных точек, из которых оно состоит, поэтому

$$L = \int_V dL = \int_V dm r^2 \omega = \omega \int_V dm r^2 = I \omega.$$

В случае однородного симметричного относительно оси вращения тела (тело, которое при любом повороте вокруг оси вращения совмещается само с собой) направления векторов  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$  совпадают (рис. 1.14, б) и поэтому

$$\vec{L} = I \vec{\omega}. \quad (1.61)$$

Для произвольного а. т. т. момент импульса  $\vec{L}$  определится по формуле

$$\vec{L} = \int_V d\vec{L} = \int_V dm[\vec{r} \times \vec{v}], \quad (1.62)$$

из которой следует, что в общем случае вектора  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$  не параллельны и поэтому вектор  $\vec{L}$  не будет направлен вдоль оси вращения.

#### 1.5.4. Взаимосвязь между скоростью изменения момента импульса и моментом силы

Запишем основной закон динамики вращательного движения (см. формулу (1.58)) в другом виде

$$I\vec{\varepsilon} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (1.63)$$

Согласно выражению (1.63) *производная по времени от вектора момента импульса тела относительно оси вращения равна векторной сумме моментов, действующих на а. т. т. внешних сил относительно этой оси вращения.*

#### 1.5.5. Закон сохранения момента импульса

Рассмотрим систему, состоящую из  $N$  взаимодействующих между собой материальных точек, вращающихся вокруг какой-либо оси. Запишем для каждой м. т. основное уравнение динамики вращательного движения (1.63), выделяя отдельно моменты внешних  $\vec{M}_i$  и внутренних  $\vec{M}_{ik}$  сил.

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{k(\neq i)} \vec{M}_{ik} + \vec{M}_i, \quad (1.64)$$

где  $i$  — номер м. т. ( $i = 1, \dots, N$ ).

Просуммируем уравнения (1.64) по всем м. т. системы, введем момент импульса  $\vec{L}$  системы и учтем, что по третьему закону Ньютона

векторная сумма моментов внутренних сил, действующих на м. т. относительно оси вращения, равна нулю

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{L}_i}{dt}, \quad \sum_{i=1}^N \sum_{i(\neq k)} \vec{M}_{ik} = 0.$$

Тогда выражение (1.64) переписывается так:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i. \quad (1.65)$$

Из формулы (1.65) следует *закон сохранения момента импульса*, согласно которому момент импульса замкнутой системы остается постоянным относительно любой оси вращения

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \quad \vec{L} = \text{const}, \quad (1.66)$$

т. е. для замкнутой системы сумма моментов внешних сил равна нулю.

Закон сохранения момента импульса (1.66) можно переписать в другом виде, используя формулу (1.68),

$$\sum_i I_i \vec{\omega}_i = \text{const}, \quad (1.67)$$

где  $I_i$ ,  $\omega_i$  — момент инерции и угловая скорость вращения  $i$ -й м. т. системы.

При вращательном движении внутренние силы могут изменить распределение массы относительно оси вращения, т. е. моменты инерции тел системы. При неизменном моменте импульса замкнутой системы такое перераспределение массы системы относительно оси вращения приводит к изменению угловой скорости входящих в нее тел.

Приведем пример, подтверждающий это явление. При вращении фигуристки изменение положения ее рук приводит к изменению момента инерции фигуристки относительно вертикальной оси вращения и соответственно к изменению угловой скорости ее вращения

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 \quad \Rightarrow \quad I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2.$$

Если фигуристка прижимает руки к телу, то тем самым она уменьшает свой момент инерции ( $I_2 < I_1$ ) и увеличивает угловую скорость вращения:

$$\omega_2 = \omega_1 I_1 / I_2 > \omega_1.$$

## 1.6. Работа и энергия при вращательном движении

### 1.6.1. Кинетическая энергия вращающегося а. т. т.

Возьмем а. т. т., вращающееся вокруг неподвижной оси с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  (см. рис. 1.14, б). Представим тело в виде совокупности м. т. массой  $dm$ , тогда для кинетической энергии тела можно записать:

$$W_k = \int dW_k = \int \frac{dmv^2}{2} = \int \frac{dm\omega^2 r^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \int_V dm r^2 = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Таким образом, кинетическая энергия а. т. т., вращающегося относительно неподвижной оси, определяется по формуле

$$W_k = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (1.68)$$

Если тело одновременно участвует в поступательном (плоском) и вращательном движениях (например, движение цилиндра без скольжения по плоскости, см. рис. 1.15, а), то его кинетическую энергию можно получить как сумму кинетической энергии двух видов движения. Это поступательное движение тела вместе с осью вращения, проходящей через его центр масс (т.  $O$ ) со скоростью  $\vec{v}$ , и вращательное движение тела относительно этой оси с угловой скоростью  $\vec{\omega}$

$$W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (1.69)$$

Для сплошного ( $I_1 = 1/2mR^2$ ) и тонкостенного ( $I_2 = mR^2$ ) цилиндров одинаковой массы  $m$  и радиуса  $R$  кинетические энергии запишутся таким образом:

$$W_{k1} = \frac{3mv^2}{4}, \quad W_{k2} = mv^2.$$

Полученные формулы для кинетической энергии цилиндров позволяют объяснить опыт по различию времени их скатывания с наклонной плоскости высотой  $h$  и длиной  $l$  (см. рис. 1.15, б). Так, согласно закону сохранения энергии (силой трения при движении цилиндров практически можно пренебречь) получим

$$mgh = \frac{3mv_1^2}{4} = mv_2^2 \Rightarrow v_2 < v_1,$$

где  $v_1, v_2$  — скорости сплошного и полого цилиндров у основания наклонной плоскости.

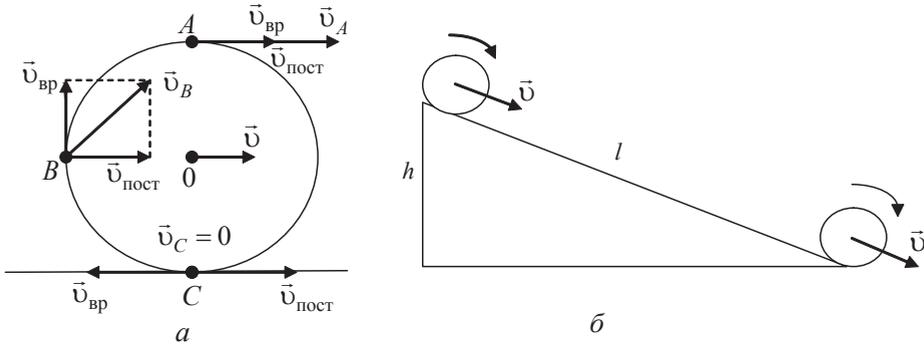


Рис. 1.15

При скатывании цилиндров центры их масс движутся равноускоренно без начальной скорости, поэтому можно записать:

$$l = \frac{v_1 t_1}{2} = \frac{v_2 t_2}{2} \Rightarrow t_2 > t_1,$$

т. е. на скатывание полого цилиндра требуется большее время, чем для сплошного цилиндра.

Качественно это можно объяснить тем, что полый цилиндр является более инертным, чем сплошной (для него момент инерции относительно оси вращения больше), и поэтому он медленнее изменяет свою скорость и поэтому тратит больше времени на скатывание с наклонной плоскости.

Как видно из рис. 1.15, *a*, модули скоростей точек на поверхности цилиндра будут разными ( $v_B = 0$ ,  $v_C = \sqrt{2}v$ ,  $v_A = 2v$ ) в связи с тем, что эти точки участвуют одновременно и в поступательном, и во вращательном движениях со скоростями  $\vec{v}_{\text{пост}} = \vec{v}$  и  $\vec{v}_{\text{вр}}$ , причем  $\vec{v}_{\text{вр}}$  для каждой точки направлена по касательной к поверхности цилиндра и равна по модулю  $v$ :  $\vec{v}_{\text{общ}} = \vec{v}_{\text{пост}} + \vec{v}_{\text{вр}} = \vec{v} + \vec{v}_{\text{вр}}$ .

Отметим, что движение цилиндра можно рассматривать и как ряд последовательных вращений вокруг мгновенной оси, проходящей через точку С (см. рис. 1.10, а) с угловой скоростью  $\omega$ . Причем и в этом случае кинетическая энергия тела также определяется формулой (1.63).

### 1.6.2. Работа внешних сил по вращению абсолютно твердого тела

Запишем формулу для элементарной работы силы  $\vec{F}$  по вращению тела вокруг неподвижной оси вращения (см. рис. 1.13, а):

$$\begin{aligned} dA &= \vec{F}d\vec{s} = F|d\vec{r}|\cos\alpha = F_r r d\varphi \cos\alpha = M d\varphi \cos\alpha = I \varepsilon d\varphi = I \frac{d\omega}{dt} d\varphi = \\ &= I \frac{d\varphi}{dt} \omega = I \omega d\omega, \end{aligned}$$

где угол  $\alpha = 0$  или  $180^\circ$  в зависимости от направления векторов момента  $\vec{M}$  силы и элементарного углового перемещения  $d\vec{\varphi}$  ( $\alpha = 0$ :  $\vec{M} \uparrow \uparrow d\vec{\varphi}$  — ускоренное вращение;  $\alpha = 180^\circ$ :  $\vec{M} \uparrow \downarrow d\vec{\varphi}$  — замедленное вращение).

Таким образом, элементарная работа внешних сил по вращению а. т. т.

$$dA = \vec{M}d\vec{\varphi} = I\vec{\omega} d\vec{\omega} = I\omega d\omega. \quad (1.70)$$

Работа внешних сил по изменению угловой скорости от  $\omega_1$  до  $\omega_2$  на конечном угловом перемещении  $\Delta\varphi = (\varphi - \varphi_0)$  определится так:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \vec{M}d\vec{\varphi} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2} = W_{k_2} - W_{k_1} = \Delta W_k. \quad (1.71)$$

Формула (1.71) представляет собой теорему о кинетической энергии в случае вращательного движения тела.

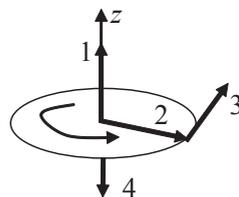
### Вопросы и задания для самоконтроля к разделу «Механика»

1. Тело движется прямолинейно, причем скорость зависит от времени по закону:  $v = 3t^2 - 10t + 2$ . Найдите зависимость ускорения тела от времени и определите его значение в момент времени 5 с.

2. Тело брошено под углом к горизонту. Как направлена скорость тела в верхней точке траектории?
3. Для какого вида движения тангенциальное ускорение  $a_t = \text{const}$ , а нормальное ускорение  $a_n = 0$ ?
4. Тело покоится на наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$ . Используя второй закон Ньютона, получите выражение для максимального коэффициента трения покоя, при котором тело может начать скользить по наклонной плоскости.
5. Как двигалось тело постоянной массы, если сила, действующая на него, не изменялась по модулю, но изменялась по направлению?
6. Система взаимодействующих между собой точек незамкнута. Будет ли равна нулю векторная сумма всех сил, с которыми точки системы взаимодействуют между собой?
7. Следствием каких законов Ньютона является закон сохранения импульса?
8. Материальная точка движется вдоль оси  $Ox$  согласно уравнению  $x = -Ct^2$ , где  $C$  — положительная константа. Определите знак мощности  $P$  силы, действующей на точку.
9. Автомобиль равномерно поднимается вверх по наклонной плоскости. Работа каких сил, действующих на автомобиль, будет отрицательна, работа какой силы равна нулю?
10. Перечислите свойства кинетической энергии. Сформулируйте теорему о кинетической энергии тела.
11. Тело движется под действием только силы тяжести. Куда направлен вектор градиента потенциальной энергии?
12. Под действием каких сил изменяется потенциальная энергия тела?
13. Зависит ли работа неконсервативных сил от формы траектории? Приведите примеры неконсервативных сил.
14. За счет работы каких сил изменяется полная механическая энергия замкнутой системы?
15. Какие законы сохранения выполняются при абсолютно упругом ударе, а какие — при абсолютно неупругом ударе?
16. Кинематическими характеристиками вращательного движения являются угловое перемещение, угловая скорость и угловое ускорение. Какие из вышеперечисленных векторов при любом характере вращения тела относительно неподвижной оси всегда будут сонаправлены?

17. Частица движется по окружности, ее угол поворота изменяется со временем по закону  $\varphi(t) = 3t^2 - 12t + 4$ . Чему равно время движения до остановки?

18. Материальная точка вращается равнозамедленно вокруг вертикальной оси (см. рисунок). Под какими цифрами обозначены вектора угловой скорости, углового ускорения и линейной скорости?



19. Сформулируйте определение момента инерции абсолютно твердого тела. Перечислите, от чего зависит момент инерции однородного тела?

20. Момент инерции тонкого обруча массой  $m$ , радиусом  $R$  относительно оси, проходящей через центр обруча перпендикулярно плоскости, в которой лежит обруч, равен  $I = mR^2$ . Используя теорему Штейнера, рассчитайте, во сколько раз изменится момент инерции обруча при параллельном переносе оси вращения из центра обруча в точку на обруче.

21. На тело действует постоянный вращающий момент. Какие из характеристик вращательного движения изменяются по линейному закону? Какая характеристика с течением времени не изменяется?

22. Человек, стоящий на краю горизонтальной, вращающейся платформы в виде диска, перемещается ближе к центру платформы. Изменится ли момент импульса платформы с человеком, и если изменится то как?

23. Тело брошено под углом к горизонту. Как направлен вектор момента импульса тела в точке наивысшего подъема относительно точки  $O$  — начала движения?

24. Изменяется ли суммарный момент сил, приложенных к телу при равноускоренном вращательном движении тела? Выполняется ли при таком движении закон сохранения момента импульса?

25. Запишите формулу для расчета кинетической энергии вращающегося тела. Как можно вычислить кинетическую энергию тела, катящегося по поверхности?

## 2. Основы молекулярной физики

---

---

### 2.1. Статистический и термодинамический методы описания свойств макроскопических систем

---

---

**Д**ля систем, состоящих из огромного числа частиц, находящихся в тепловом движении, наряду с механической формой движения материи появляется новая *тепловая форма движения*. Это можно подтвердить следующими фактами:

- 1) у системы появляются новые свойства (макропараметры, такие как давление, температура, электрическое сопротивление и т. д.), которыми не обладают отдельные частицы;
- 2) система забывает свои предыдущие состояния. Например, какое-либо равновесное состояние газа можно получить различными способами, и по конечному состоянию газа нельзя определить, какой из них был реализован. Этим тепловая форма движения материи существенно отличается от механической формы движения (в механике конечное состояние тела однозначно связано с его начальным состоянием);
- 3) состояние отдельной частицы не оказывает влияния на макроскопическое состояние системы. Так, например, давление газа в равновесном состоянии остается постоянным, хотя скорость какой-либо частицы из-за теплового движения постоянно изменяется.

Все это свидетельствует о том, что в этом разделе необходимо использовать другие подходы (термодинамический и статистический подходы) к описанию свойств макросистемы.

Кратко изложим суть *статистического подхода*, схема реализации которого приведена на рис. 2.1.

Для системы, находящейся в равновесном состоянии, из-за хаотичности теплового движения имеется большой набор случайных зна-

чений скоростей и координат частиц. Оказывается, что на огромной совокупности случайных значений скоростей, координат, кинетических энергий, потенциальных энергий отдельных частиц (первый блок на рис. 2.1) появляются строгие статистические закономерности, которые выражаются функциями распределения частиц по модулю их скоростей  $f(v)$ , по координатам  $f(x, y, z)$ , кинетическим  $f(W_K)$ , потенциальным энергиям  $f(W_P)$  и т. д. (второй блок на рис. 2.1).



Рис. 2.1

Знание этих функций распределения позволяет оценить средние свойства частиц, т. е. свойства, усредненные по всей совокупности частиц (третий блок на рис. 2.1). Средние свойства частиц характеризуют всю совокупность частиц в целом. Если, например, говорят, что скорость частиц с повышением температуры возрастает, то под этим подразумевают средние скорости частиц.

Далее знание средних характеристик частиц позволяет получить макроскопические свойства системы (четвертый блок на рис. 2.1).

В *термодинамическом подходе* при описании свойств системы ее внутреннее строение не рассматривается, а используются величины, относящиеся к системе в целом — *термодинамические параметры состояния*. Связь между термодинамическими параметрами состояния устанавливается экспериментально. Все основные выводы о поведении систем делаются на основе трех начал (законов) термодинамики. Эти законы термодинамики являются постулатами (недоказуемыми утверждениями), они обобщают опытные данные. В связи с этим выводы термодинамики являются достоверными и не подвергаются сомнению.

Основными термодинамическими параметрами состояния в молекулярной физике являются давление, температура, плотность и концентрация.

*Давление  $p$*  — скалярная физическая величина, характеризующая распределение силы по поверхности, на которую она действует, и численно равная нормальной составляющей силы, действующей на единицу площади поверхности перпендикулярно этой поверхности ( $p = F_n/S$ ,

где  $F_n$  — нормальная составляющая силы, т. е. составляющая силы, перпендикулярная поверхности  $S$ , на которую сила действует).

*Температура  $T$*  — скалярная физическая величина, определяющая степень нагретости тела: чем более нагрето тело, тем выше будет его температура.

*Плотность  $\rho$*  — скалярная физическая величина, равная массе вещества в единице объема ( $\rho = m/V$ ).

*Концентрация  $n$*  — скалярная физическая величина, равная числу молекул в единице объема ( $n = N/V$ ).

В последующем изложении рассмотрим подробно отдельные этапы применения статистического подхода. Причем сначала будут рассматриваться системы классических частиц, т. е. частиц, для которых волновые свойства не сказываются на их движении.

---

## 2.2. Функция распределения Максвелла и ее применение

---

### 2.2.1. Понятие о функции распределения Максвелла (функции распределения молекул идеального газа по модулю скорости молекул)

Пусть идеальный газ (его молекулы на расстоянии не взаимодействуют, а при столкновениях ведут себя как упругие шары) находится в закрытом сосуде в равновесном состоянии при температуре  $T$ .

Для того чтобы ввести функцию распределения молекул по модулю скорости, возьмем произвольную молекулу идеального газа и через равные промежутки времени будем измерять модуль ее скорости. Пусть из общего числа  $N$  опытов  $dN_v$  дает число опытов, в которых скорости молекул попадают в интервал скоростей  $(v, v + dv)$ . Тогда вероятность  $dP(v)$  попадания скорости молекулы в малый интервал скоростей будет равна

$$dP(v) = \frac{dN_v}{N}$$

при стремлении общего числа опытов к бесконечности ( $N \rightarrow \infty$ ). Это позволяет ввести функцию распределения молекул по модулю скорости

$$f(v) = \frac{dP(v)}{dv}. \quad (2.1)$$

Случайным в выражении (2.1) является номер выбираемой молекулы, над которой проводятся опыты, а закономерным то, что вероятность  $dP(v)$  попадания значений скоростей молекулы в интервал скоростей  $(v, v + dv)$  остается все время постоянной величиной и не зависит от номера выбираемой молекулы.

Итак, функция  $f(v)$  является плотностью вероятности и равна отношению вероятности  $dP(v)$  попадания модуля скорости молекулы в интервал скоростей  $(v, v + dv)$  к величине этого интервала  $dv$ .

Можно предложить другой способ определения, другой физический смысл функции распределения  $f(v)$ . Для этого зафиксируем в какой-то момент времени скорости всех молекул и нанесем их на ось скоростей (рис. 2.2).

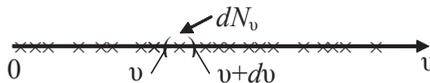


Рис. 2.2

Число молекул  $dN_v$ , попадающих в интервал скоростей  $(v, v + dv)$ , будет зависеть от общего числа молекул  $N$ , от величины интервала скоростей  $dv$  и от скорости  $v$ , вблизи которой берется этот интервал. Эту зависимость от скорости  $v$  можно описать с помощью функции  $f(v)$ . Тогда

$$dN_v = N \cdot f(v)dv \Rightarrow f(v) = \frac{dN_v}{Nd v}. \quad (2.2)$$

Итак, функция  $f(v)$  равна отношению относительного числа молекул  $(dN_v / N)$ , скорости которых попадают в бесконечно малый интервал скоростей  $(v, v + dv)$ , к величине этого интервала  $dv$ .

Входящая в формулы (2.1) и (2.2) функция  $f(v)$  получила название функции распределения молекул по модулю скорости или функции распределения Максвелла. Случайным в формуле (2.2) являются номера молекул, скорости которых попадают в заданный интервал скоростей, а закономерным то, что их число остается постоянным и не за-

висит от номеров молекул. Формула для этой функции была получена в 1859 г. английским ученым Максвеллом и она имеет вид:

$$f(v) = \frac{dN_v}{Ndv} = \frac{dP(v)}{dv} = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}. \quad (2.3)$$

В формуле (2.3)  $m_0$  обозначает массу одной молекулы, а  $k$  — это постоянная Больцмана.

График функции  $f(v)$  приведен на рис. 2.3, а. Из него видно, что при скорости молекулы  $v$ , равной нулю ( $v=0$ ), функция  $f(v)$  обращается в ноль, затем функция нарастает и при скорости, называемой наиболее вероятной скоростью  $v_B$  молекул, достигает максимального значения, после этого она спадает до нуля при скоростях молекул, стремящихся к бесконечности.

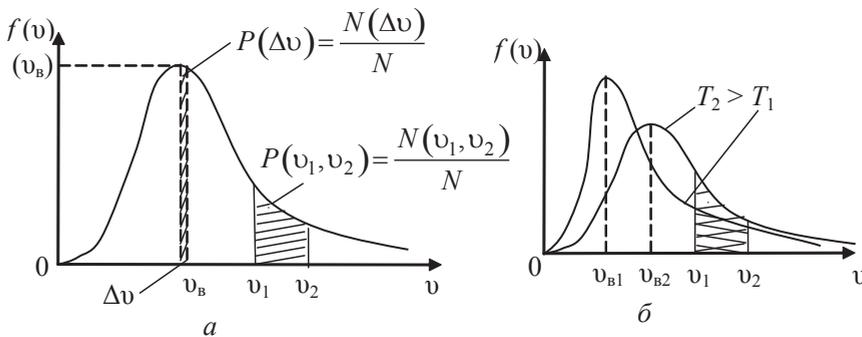


Рис. 2.3

Зная функцию распределения молекул идеального газа по скоростям  $f(v)$ , можно найти относительное число молекул  $\frac{N(v_1, v_2)}{N}$ , скорости которых попадают в интервал скоростей  $(v_1, v_2)$ , или вероятность попадания  $dP(v_1, v_2)$  скорости одной молекулы в интервал скоростей  $(v_1, v_2)$ :

$$\frac{N(v_1, v_2)}{N} = P(v_1, v_2) = \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv. \quad (2.4)$$

Графически эта величина  $N(v_1, v_2)/N$  (или  $P(v_1, v_2)$ ) представляет собой площадь под графиком функции  $f(v)$  в пределах интервала

скоростей от  $v_1$  до  $v_2$  (см. рис. 2.3, а). В случае малого интервала скоростей  $\Delta v$  (в его пределах функция распределения  $f(v)$  остается примерно постоянной величиной) можно с достаточной степенью точности рассчитать относительное число ( $N\Delta v$ ) молекул или вероятность  $P(\Delta v)$  по упрощенной формуле

$$\frac{N(\Delta v)}{N} = P(\Delta v) = f(v)\Delta v. \quad (2.5)$$

В этом случае площадь под графиком функции будет представлять собой площадь прямоугольной полоски (см. рис. 2.3, а).

Можно дать пояснение названию наиболее вероятной скорости  $v_B$  молекул: если выбирать одинаковый интервал скоростей  $\Delta v$  около различных значений скорости  $v$ , то вблизи скорости  $v_B$  в малый интервал скоростей  $\Delta v$  попадет наибольшее число молекул (площадь прямоугольной полоски шириной  $\Delta v$  будет наибольшей).

Площадь под графиком функции распределения  $f(v)$  будет равна единице

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1. \quad (2.6)$$

Это выражение называют *условием нормировки*. Интеграл в формуле (2.6) представляет собой вероятность того, что скорость отдельной молекулы попадает в область всех возможных значений скоростей, а это является достоверным событием, вероятность которого равна единице.

По другой трактовке функции распределения  $f(v)$  этот интеграл представляет собой относительное число молекул, скорости которых попадают в область всевозможных значений скоростей, что приводит также к единице в формуле (2.6).

Для того чтобы качественно пояснить изменение графика функции распределения  $f(v)$  при повышении температуры идеального газа, необходимо выяснить, как изменяется максимум функции  $f(v)$ . Исследуя функцию  $f(v)$  на экстремум, получаем значения наиболее вероятной скорости и функции Максвелла, отвечающей этому значению

$$v_B = \sqrt{\frac{2\kappa T}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}, \quad (2.7)$$

$$f(v_B) = \frac{2}{e} \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \sim \sqrt{\frac{m_0}{T}}. \quad (2.8)$$

В формулу (2.7) входит универсальная газовая постоянная  $R$  ( $R = kN_A$ ) и молярная масса  $M$  ( $M = m_0N_A$ ) газа.

Как видно из формул (2.7) и (2.8), при повышении температуры максимум функции  $f(v)$  становится меньше и смещается в сторону больших скоростей.

На рис. 2.3, б приведены графики функции  $f(v)$  для двух температур ( $T_2 > T_1$ ). При построении графиков было также учтено, что согласно формуле (2.6) площадь под графиком функции при повышении температуры не изменяется и остается равной единице.

Как следует из графиков, приведенных на рис. 2.3, б, *увеличение температуры идеального газа приводит к возрастанию числа молекул с повышенными скоростями*. Так, повышение температуры приводит к возрастанию числа молекул, попадающих в приведенный на рис. 2.3, б интервал скоростей ( $v_1, v_2$ ).

### 2.2.2. Функция распределения молекул идеального газа по кинетическим энергиям поступательного движения молекул

Функция распределения молекул идеального газа по кинетическим энергиям  $W_K$  вводится аналогично функции распределения по модулю скорости  $f(v)$

$$f(W_K) = \frac{dN_{W_K}}{NdW_K} = \frac{dP(W_K)}{dW_K}, \quad (2.9)$$

где  $dN_{W_K}$  — число молекул, кинетические энергии которых попадают в бесконечно малый интервал ( $W_K, W_K + dW_K$ ), а  $dP(W_K)$  — вероятность того, что кинетическая энергия молекулы в отдельном опыте попадает в бесконечно малый интервал ( $W_K, W_K + dW_K$ ).

Формулу для функции  $f(W_K)$  можно получить из того условия, что число молекул, кинетические энергии которых попадают в интервал энергий ( $W_K, W_K + dW_K$ ), равно числу молекул, скорости которых попадают в интервал скоростей ( $v, v + dv$ ). Это является следствием формулы для кинетической энергии молекулы  $W_K = m_0v^2/2$ . Итак,

$$\begin{aligned}
 dN_{W_K} &= dN_v \Rightarrow \\
 \Rightarrow N \cdot f(W_K) dW_K &= N \cdot f(v) dv \Rightarrow f(W_K) = f(v) \frac{dv}{dW_K} = \\
 &= f(v) \frac{1}{(dW_K / dv)} = \frac{1}{m_0 v} f(v).
 \end{aligned}$$

Заменяя в полученном выражении скорость  $dM = -D \frac{dp}{dr} dS_{\perp} dt$  через кинетическую энергию молекулы ( $v = \sqrt{2W_K / m_0}$ ), для функции распределения молекул по их кинетическим энергиям получим

$$f(W_K) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot (kT)^{3/2}} \sqrt{W_K} \cdot e^{-\frac{W_K}{kT}}. \quad (2.10)$$

Сравнивая выражения (2.3) и (2.10), видим, что поведение зависимостей  $f(W_K)$  и  $f(v)$  в общих чертах одинаково.

Таким же способом можно получить функцию распределения молекул по относительным скоростям ( $u = v/v_B$ )

$$f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2}. \quad (2.11)$$

Эта функция удобна тем, что параметры конкретного идеального газа (масса молекулы, температура) входят в формулу (2.11) через наиболее вероятную скорость молекул.

### 2.2.3. Средние характеристики молекул

Функции распределения позволяют рассчитать средние свойства молекул, характеризующие всю совокупность молекул в целом. Оценим среднюю арифметическую скорость  $\langle v \rangle$  молекул, которая, согласно ее определению, равна сумме модулей всех скоростей молекул, взятых в какой-то момент времени, деленной на их число

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N v_i. \quad (2.12)$$

Для расчета средней арифметической скорости молекул газа обратимся к методам статистики, согласно которым среднее значение произвольной величины  $\langle x \rangle$  может быть рассчитано с помощью функции распределения  $f(x)$  как

$$\langle x \rangle = \int_0^{\infty} x f(x) dx. \quad (2.13)$$

Тогда

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \quad (2.14)$$

Аналогично можно оценить среднее значение от квадрата скорости молекул

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = \frac{3kT}{m_0} = \frac{3RT}{M}.$$

Следовательно, средняя квадратичная скорость молекул равна

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (2.15)$$

Среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул можно рассчитать по формуле

$$\langle W_{\text{к,пост}} \rangle = \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3kT}{2}. \quad (2.16)$$

## 2.2.4. Молекулярно-кинетический смысл температуры

Можно вводить разные определения температуры, показывая каждый раз новые ее свойства. Так, например, в п. 2.1 температура была определена как величина, определяющая степень нагретости тела.

Другое определение температуры связано с тем, что она является *единственным термодинамическим параметром состояния, одинаковым для всех тел, находящихся в состоянии теплового равновесия*. Так, например, если принести мяч с улицы в комнату, то с течением вре-

мени температуры мяча и воздуха в комнате станут одинаковыми, хотя остальные термодинамические параметры — давление воздуха в комнате и внутри мяча и объем мяча и комнаты — останутся разными.

Из опыта известно, что для разреженных газов (они подчиняются законам идеальных газов), находящихся в состоянии теплового равновесия, величина  $(pV/N)$  принимает одинаковое значение, т. е. это величина является температурой. Для того чтобы измерять температуру тел в градусах, вводят коэффициент  $k$ , называемый постоянной Больцмана

$$\left( \frac{pV}{N} = kT \right). \quad (2.17)$$

В соответствии с формулой (2.17) вводится абсолютная шкала температур, шкала температур Кельвина. В этой шкале температура принимает положительные значения  $T \geq 0$ .

Выражение (2.17) позволяет выяснить молекулярно-кинетический смысл температуры

$$T = \frac{2 \langle W_{\text{к, пост}} \rangle}{3k}, \quad (2.18)$$

а именно, *температура системы является мерой интенсивности теплового движения молекул*. С понижением температуры интенсивность теплового движения молекул уменьшается и при абсолютном нуле температур ( $T = 0$  К) оно будет отсутствовать.

### 2.2.5. Основное уравнение МКТ идеального газа для давления

Средние характеристики молекул позволяют рассчитать термодинамические параметры системы. Рассмотрим вывод уравнения для давления идеального газа, находящегося в объеме  $V$  при температуре  $T$ .

Как известно, давление газа на стенки сосуда обусловлено ударами молекул о стенки сосуда. Предположим, что все молекулы движутся с одинаковой по модулю скоростью  $v$  вдоль трех взаимно перпендикулярных осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  и испытывают абсолютно упругие соударения со стенками сосуда. Тогда импульс, передаваемый молекулой при одном ударе о стенку,  $\Delta p_{\text{СТ}} = 2m_0v$ . За время  $\Delta t$  со стенкой сосуда стол-

кнется  $1/6$  часть всех молекул, находящихся в объеме цилиндра с площадью основания  $S$  и высотой  $v\Delta t$  (см. рис. 2.4). Это связано с хаосом в движении молекул — вдоль любой из осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  движется одинаковое число молекул ( $(1/3)N$ ), а в положительном направлении оси  $Ox$  — половина от  $(1/3)N$ , т. е.  $(1/6)N$  всех молекул. За время  $\Delta t$  все молекулы проходят расстояние  $v\Delta t$ , что и определяет высоту цилиндра.

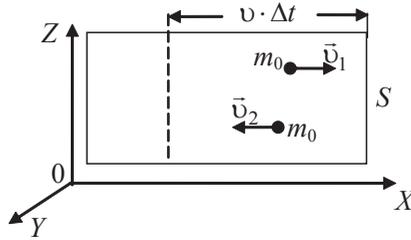


Рис. 2.4

Поэтому за время  $\Delta t$  стенка получит от молекул импульс, равный

$$\Delta p'_{CT} = 2m_0 v \left( \frac{1}{6} N \right) = 2m_0 v \left( \frac{1}{6} n v \Delta t S \right) = \frac{1}{3} m_0 n v^2 \Delta t S, \quad (2.19)$$

где в формулу введена концентрация молекул  $n = N/V$ .

Давление газа на стенку сосуда равно отношению средней силы давления на стенку сосуда к площади этой стенки, а средняя сила давления выражается через средний импульс, переданный стенке за время  $\Delta t$

$$p = \frac{\langle F \rangle}{S} = \frac{\langle \Delta p'_{CT} \rangle}{\Delta t S} = \frac{1}{3} m_0 n \langle v^2 \rangle. \quad (2.20)$$

Итак, для давления идеального газа на стенки сосуда можно записать

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{KB} \rangle^2. \quad (2.21)$$

Как показывают расчеты, учет движения молекул по всем направлениям в пространстве (не только вдоль осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ ) приводит также к записанной выше формуле для давления идеального газа.

Выразим давление идеального газа через среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул

$$p = \frac{2}{3} n \langle W_K \rangle. \quad (2.22)$$

## 2.3. Барометрическая формула

Рассмотрим газ, находящийся в равновесии в поле силы тяжести. В этом случае сумма действующих сил на каждый элемент объема газа равна нулю. Выделим малый объем газа на высоте  $h$  (рис. 2.5, а) и рассмотрим действующие на него силы.

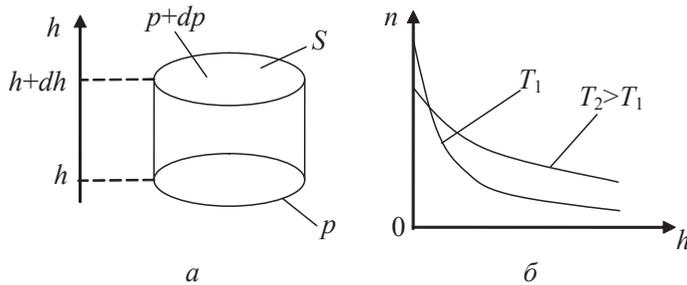


Рис. 2.5

На выделенный объем действует сила давления газа снизу, сила давления газа сверху и сила тяжести. Тогда баланс сил запишется в виде

$$pS = (p + dp)S + gdm, \quad (2.23)$$

где  $dm$  — масса выделенного объема. Для этого объема можно записать уравнение Менделеева — Клапейрона

$$pdV = \frac{dm}{M}RT. \quad (2.24)$$

Выражая величину  $dm$ , можно получить уравнение

$$dp = -dh \frac{pM}{RT} g.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dp}{p} = -dh \frac{Mg}{RT}.$$

Проинтегрируем полученное уравнение, учтя, что температура постоянна,

$$\ln p = -h \frac{Mg}{RT} + \text{const} . \quad (2.25)$$

Пусть давление на поверхности равно  $p_0$ , тогда полученное уравнение легко преобразовать к виду

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right). \quad (2.26)$$

Полученная формула называется барометрической и достаточно хорошо описывает распределение давления по высоте в атмосфере Земли и других планет. Важно помнить, что эта формула была выведена из предположения равновесия газа, при этом величины  $g$  и  $T$  считались постоянными, что, конечно, не всегда справедливо для реальной атмосферы.

Применение полученной формулы для оценки давления воздуха возможно только для малых перепадов высот. Это связано с тем, что температура воздуха с увеличением высоты понижается и к тому же происходит перемешивание воздушных слоев, что приводит к незначительному снижению давления воздуха до высот порядка нескольких километров.

## 2.4. Распределение Больцмана

Запишем барометрическую формулу (2.26) через концентрацию частиц, воспользовавшись тем, что  $p = nkT$ :

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{m_0gh}{kT}\right), \quad (2.27)$$

где  $n_0$  — концентрация газа на поверхности земли,  $n$  — концентрация газа на высоте  $h$  от поверхности земли.

На рис. 2.5, б приведены графики зависимости концентрации  $n$  газа от высоты  $h$  при различных температурах  $T$ . Видно, что с повышением температуры зависимости  $n(h)$  становятся более пологими, при этом изменяется концентрация  $n_0$  молекул газа на поверхности земли (она уменьшается).

Также отметим, что согласно формуле (2.28) состав воздуха (он представляет собой смесь таких газов, как азот, кислород, углекислый газ, гелий и т. д.) будет с высотой изменяться — с повышением высоты будет повышаться концентрация газов с меньшей молярной массой.

Такой же вывод можно провести для любой потенциальной силы (не обязательно для силы тяжести). Из формулы (2.27) видно, что в числителе экспоненты стоит потенциальная энергия одной молекулы в потенциальном поле. Тогда формулу (2.27) можно записать в виде

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{W_p}{kT}\right). \quad (2.28)$$

В таком виде эта формула пригодна для нахождения концентрации молекул, находящихся в равновесии в поле любой потенциальной силы.

## 2.5. Экспериментальная проверка распределения молекул по модулю скорости. Опыт Ламмерта

---

В настоящее время известны несколько опытов, в которых проверялось распределение частиц идеального газа по модулю их скоростей. В них использовался метод молекулярных и атомных пучков (Штерн, 1920 г., Эдридж, 1927 г., Ламмерт, 1929 г.). Возможна также проверка распределения Максвелла по наблюдению уширения спектральных линий, которые излучают движущиеся возбужденные молекулы газа. За счет эффекта Доплера происходит смещение частоты излучения в зависимости от скорости движения молекул, что и позволяет по уширению спектральных линий проверить распределение молекул по скоростям.

Рассмотрим подробнее опыты Штерна и Ламмерта.

В опыте Штерна селектор и детектор совмещены во вращающемся цилиндре с щелью (см. рис. 2.6). Когда щель попадает на линию пучка, через нее внутрь цилиндра входит порция молекул. Молекулы с различными скоростями достигают противоположной стенки цилиндра с различным запаздыванием по отношению к моменту прохождения щели и поэтому попадают на разные участки внутренней стенки цилиндра.

Измеряя число молекул, попавших на различные участки, можно вычислить распределение молекул в пучке по скоростям. Проведенные эксперименты подтвердили справедливость распределения Максвелла.

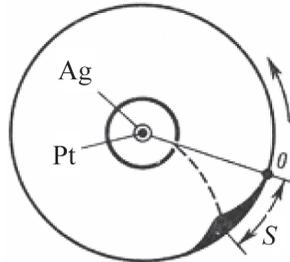


Рис. 2.6

В опыте Ламмерта в специальном устройстве испаряют жидкий металл, его пары содержат молекулы с различными скоростями, которые соответствуют температуре испаряемого металла. Затем формируется узкий молекулярный пучок, он проходит через систему, состоящую из двух синхронно вращающихся с угловой скоростью  $\omega$  дисков, расположенных на расстоянии  $l$  друг от друга (см. рис. 2.7, а). В этих дисках имеются радиальные щели, смещенные на некоторый угол  $\varphi$  друг относительно друга. Через такую систему из двух дисков проходят молекулы, скорости которых удовлетворяют условию, при котором время прохождения молекулой расстояния  $l$  между дисками должно равняться времени поворота дисков на угол  $\varphi$

$$t = \frac{l}{v} = \frac{\varphi}{\omega} \Rightarrow v = l \frac{\omega}{\varphi}. \quad (2.29)$$

Эти молекулы, пройдя систему из двух дисков, попадают в ловушку (приемник).

Таким образом, выделяются из пучка только те молекулы, скорости которых попадают в узкий интервал скоростей (этот интервал связан с конечной шириной щелей, он будет вблизи скорости  $v$ , равной  $v = l \cdot \omega / \varphi$ ). Число таких молекул можно было оценить по толщине осадка на стеклянной пластине, помещенной в приемнике. Изменяя параметры  $l, \varphi$  и  $\omega$ , можно было установить распределение молекул пучка по скоростям. Полученные из опыта кривые распределения молекул по скоростям подтвердили справедливость распределения Максвелла.

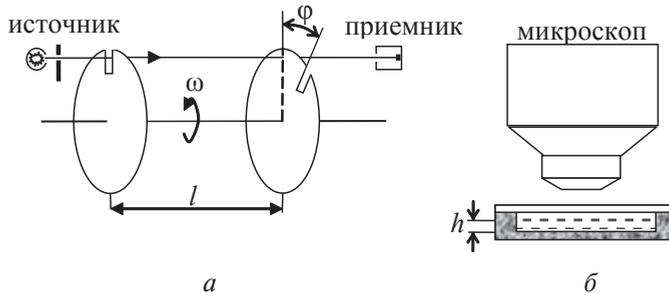


Рис. 2.7

## 2.6. Опыты Перрена по определению постоянной Авогадро

Известно, что броуновские частицы (мельчайшие частицы твердого вещества, взвешенные в жидкости или газе и которые можно наблюдать в микроскопе) находятся в тепловом движении так же, как и молекулы. Поэтому Перрен предположил, что распределение Больцмана справедливо и для броуновских частиц. При этом из-за значительно большей массы этих частиц по сравнению с массой молекул должны были наблюдаться более существенные изменения в концентрации частиц при малом изменении высоты  $K_{\text{гелия}} / K_{\text{воздуха}} \cong 1,62$ . В своих опытах Перрен использовал микроскоп с малой глубиной резкости. Это позволило ему достаточно хорошо наблюдать частицы (их размеры были порядка  $10^7$  м) в пределах объема, высота которого была порядка ( $\Delta h \approx 10^{-6}$  м).

В опытах определялось число частиц, попадающих в поле зрения микроскопа в зависимости от высоты  $h$ , отсчитываемой от дна стеклянной трубки, в которой находилась жидкость с взвешенными в ней броуновскими частицами (см. рис. 2.7, б).

В соответствии с распределением Больцмана для отношения концентраций частиц на разной высоте (формула (2.27)) можно записать

$$\ln \left( \frac{n_1}{n_2} \right) = \frac{(m - \rho_{\text{ж}} V) g (h_2 - h_1)}{kT} = N_A \frac{m(1 - \rho_{\text{ж}} / \rho)(h_2 - h_1)}{RT},$$

что позволило получить формулу для экспериментального определения постоянной Авогадро  $N_A$ :

$$N_A = \frac{RT}{(\rho - \rho_{\text{ж}})gV(h_2 - h_1)} \ln\left(\frac{n_1}{n_2}\right). \quad (2.30)$$

В эти формулы вместо массы  $m$  частицы входит разность  $(m - \rho_{\text{ж}}V)$ , учитывающая дополнительную силу — силу Архимеда, действующую в жидкости на частицу;  $\rho_{\text{ж}}, \rho$  — плотности жидкости и вещества частицы соответственно;  $V$  — объем частицы.

В результате проведенных опытов Перрен показал, что постоянная Авогадро  $N_A$  может принимать значения  $N_A = (6,5 \div 7,2) \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>, заключенные в интервале, что находилось в согласии с данными других опытов.

Уникальность опытов Перрена была связана с плохой экспериментальной аппаратурой, существовавшей в то время (1906 г.). Так, в частности, достаточно трудно было поддерживать с высокой точностью температуру во всем объеме жидкости и наблюдать быстро движущиеся частицы в микроскопе.

## 2.7. Основные понятия равновесной термодинамики

*Функция состояния системы* — это любая функция параметров системы, которая принимает одно и то же значение в данном состоянии системы независимо от способа перехода в это состояние.

*Равновесным состоянием* системы называется такое состояние, при котором все параметры системы имеют определенные значения, остающиеся при неизменных внешних условиях постоянными сколь угодно долго.

*Неравновесное состояние* — состояние, в котором хотя бы один из термодинамических параметров не имеет определенного значения.

*Процесс релаксации* — процесс перехода предоставленной самой себе системы из неравновесного состояния в равновесное состояние.

*Изолированная (замкнутая) система* — система, которая не обменивается с внешними телами энергией и веществом.

*Закрыва́тая система* — система, которая обменивается энергией и не обменивается частицами с окружающими ее внешними телами.

*Открытая система* — система, которая обменивается энергией и частицами с окружающими внешними телами.

Процесс, состоящий из непрерывной последовательности равновесных состояний, называется *равновесным*. Из сказанного следует, что равновесным может быть только бесконечно медленный процесс. При достаточно медленном протекании реальные процессы могут приближаться к равновесному состоянию сколь угодно близко.

*Все равновесные процессы являются обратимыми*. Равновесный процесс может быть проведен в обратном направлении, причем система будет проходить через те же состояния, что и при прямом ходе, но в обратной последовательности. При этом в окружающей среде не останется никаких изменений.

Равновесные процессы можно изображать на диаграммах состояний, а неравновесные процессы нельзя из-за неопределенности параметров состояния в каждой точке процесса (их протекание можно обозначить пунктирной линией).

*Круговой процесс* — это процесс, при котором система возвращается в исходное состояние.

## 2.8. Число степеней свободы молекулы.

### Закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы

*Числом  $i$  степеней свободы* в механике называют число независимых между собой возможных перемещений механической системы, оно зависит от числа материальных точек, образующих систему, а также от числа и характера наложенных на систему механических связей. За счет возбуждения таких степеней свободы у системы появляется энергия, в основном эта энергия будет представлять собой энергию кинетического движения.

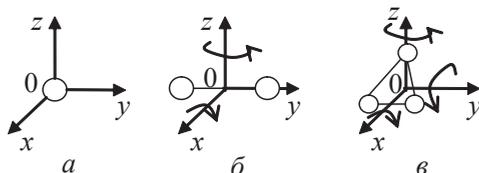


Рис. 2.8

Для свободной материальной точки число степеней свободы равно трем ( $i = 3$ ) — это степени свободы поступательного движения, которое для своего описания требует трех координат ( $x, y, z$ ), с этими степенями свободы связана кинетическая энергия поступательного движения. Число степеней свободы вращательного движения для материальной точки отсутствует ( $i = 0$ ), так как вращение материальной точки относительно взаимно перпендикулярных осей ( $Ox, Oy, Oz$ ), проходящих через нее, не вызывает ее перемещения в пространстве, т. е. не требует дополнительной энергии.

1. *Молекула, состоящая из одного атома,*

$$i_{\text{пост}} = 3, \quad i_{\text{вращ}} = 0, \quad i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} = 3. \quad (2.31)$$

Число степеней свободы равно трем, они соответствуют поступательному движению молекулы. Степеней свободы вращательного движения — нет (см. рис. 2.8, а).

2. *Молекула, состоящая из двух атомов*

а) *молекула является жесткой* (расстояние между атомами в ней не изменяется), для нее число степеней свободы будет складываться из трех степеней свободы поступательного движения и двух степеней свободы вращательного движения:

$$i_{\text{пост}} = 3, \quad i_{\text{вращ}} = 2, \quad i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} = 5; \quad (2.32)$$

В этом случае вращение вокруг оси, проходящей через ось молекулы (вокруг оси  $Oy$ , рис. 2.8, б), теряет свой смысл — при таком вращении положение молекулы в пространстве не изменяется;

б) *нежесткая молекула* — расстояние между атомами может изменяться (между атомами возникают силы упругости), тогда возможно колебательное движение атомов в молекуле, оно будет происходить по гармоническому закону, при этом у атомов помимо кинетической энергии появляется и потенциальная энергия. Следовательно, такая молекула будет обладать шестью степенями свободы, причем одна из них будет соответствовать колебательной степени свободы:

$$i_{\text{пост}} = 3, \quad i_{\text{вращ}} = 2, \quad i_{\text{кол}} = 1, \quad i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + i_{\text{кол}} = 6. \quad (2.33)$$

3. *Многоатомная молекула* (число молекул  $N$ ).

а) *для жесткой молекулы*, как и для твердого тела, число степеней свободы равно шести — три степени свободы поступательного дви-

жения и три степени свободы вращательного движения относительно трех взаимно перпендикулярных осей (см. рис. 2.8, в):

$$i_{\text{пост}} = 3, \quad i_{\text{вращ}} = 3, \quad i_{\text{кол}} = 0, \quad i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + i_{\text{кол}} = 6; \quad (2.34)$$

б) *нежесткая молекула*. Между атомами действуют упругие силы, число степеней свободы для молекулы будет равно  $S = \text{const}$ , из которых три степени свободы приходится на поступательное движение, три степени свободы на вращательное движение равновесной конфигурации молекулы и ( $V = \text{const}$ ) степеней свободы на колебательное движение:

$$i_{\text{пост}} = 3, \quad i_{\text{вращ}} = 3, \quad i_{\text{кол}} = 3N - 6, \quad i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + i_{\text{кол}} = 3N. \quad (2.35)$$

Представляет интерес оценить, какая средняя энергия приходится на одну степень свободы любого вида движения. Максвелл сформулировал закон о равномерном распределении энергии хаотического теплового движения молекул по степеням свободы, согласно которому на одну степень свободы поступательного и вращательного движения в среднем приходится энергия, равная  $kT/2$ , а на каждую степень свободы колебательного движения — энергия  $kT$ .

Итак, согласно закону о равномерном распределении энергии по степеням свободы средняя энергия молекулы, участвующей в тепловом движении, определяется формулой

$$\langle W_K \rangle = \frac{kT}{2}(i_{\text{вращ}} + i_{\text{пост}}) + (kT) \cdot i_{\text{кол}}. \quad (2.36)$$

В дальнейшем, при описании идеального газа будем рассматривать только жесткие молекулы (данное приближение оказывается справедливым в интервале температур приблизительно от 10 до  $10^3$  К, при более высоких температурах появляются дополнительно колебательные степени свободы) и тогда формула (2.36) запишется в виде

$$\langle W_K \rangle = \frac{i}{2} kT = \frac{i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}}}{2} kT. \quad (2.37)$$

## 2.9. Внутренняя энергия системы, работа, теплообмен

### 2.9.1. Внутренняя энергия системы

Под внутренней энергией  $U$  системы понимают ее энергию за вычетом энергии системы во внешних полях и кинетической энергии движения системы как целого. Внутренняя энергия системы зависит от параметров ее состояния (в самом простом случае от таких параметров, как ее объем, температура и давление).

*Внутренняя энергия системы является функцией состояния системы, т. е. она принимает одно и то же значение в данном состоянии системы независимо от способа перехода в это состояние:  $U = U(p, V, T)$ .*

Так как параметры системы связаны уравнением состояния

$$pV = \nu RT, \quad (2.38)$$

то это означает, что внутренняя энергия системы может быть записана как функция только двух переменных, например, объема и давления:  $U = U(p, V)$ .

С точки зрения молекулярной физики, внутренняя энергия системы складывается из суммы кинетических энергий теплового движения молекул и потенциальной энергии их взаимодействия. Так как молекулы идеального газа не взаимодействуют друг с другом, то его внутренняя энергия с учетом формулы (2.37) равна

$$U = \sum_{i=1}^N W_{k_i} = N \langle W_k \rangle = \frac{i}{2} NkT = \frac{i}{2} \nu RT, \quad (2.39)$$

где учтено, что  $N = \nu N_A$  и  $R = kN_A$  — универсальная газовая постоянная ( $R = 8,31$  Дж/моль · К,  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  — постоянная Авогадро).

Внутреннюю энергию системы можно изменить за счет взаимодействия с внешними телами с помощью работы и теплопередачи (теплообмена). При этом считается, что обмена частицами не происходит, т. е. система является закрытой.

### 2.9.2. Работа в термодинамике

Под *работой* понимают такой способ обмена энергией между системой и окружающими телами, при котором происходит перемещение макроскопических частей системы, меняется ее объем. Работа как процесс обмена энергией связана с упорядоченной формой движения материи. Энергия, передаваемая или получаемая при этом системой, называется работой.

Выведем формулу, которая позволяет рассчитать работу для различных процессов. Рассмотрим процесс равновесного расширения газа, находящегося под поршнем (см. рис. 2.8, *a*). Сила  $F$  давления газа на поршень площади  $S$  при его элементарном перемещении  $dl$  совершает элементарную работу  $\delta A$ , равную

$$\delta A = Fdl \cos 0 = (pS)dl = p(Sdl) = pdV. \quad (2.40)$$

Если работа связана с конечным изменением объема, то она определяется по формуле

$$A = \int \delta A = \int_{V_1}^{V_2} pdV. \quad (2.41)$$

Работа газа при его расширении ( $V_2 > V_1$ ) будет положительной, а при сжатии ( $V_2 < V_1$ ) — отрицательной. В *изохорическом процессе* объем газа остается неизменным ( $dV = 0$ ) и газ при этом работы *не совершает*.

Графически работа газа определяется площадью под графиком зависимости давления газа  $p$  от объема  $V$  в ходе процесса (рис. 2.9, *б*). Следовательно, значение интеграла (см. формулу (2.42)) зависит не только от пределов интегрирования, но и от *формы кривой* на  $p$ - $V$ -диаграмме. Поэтому говорят, что *работа газа есть функция процесса*. Для того чтобы подчеркнуть это обстоятельство, в обозначении элементарной работы используется символ « $\delta$ » (см. формулу (2.41)), а не символ « $d$ ».

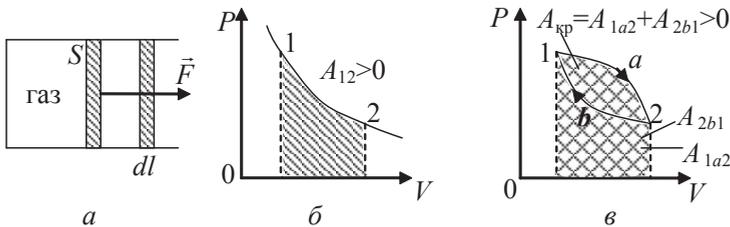


Рис. 2.9

Для кругового процесса работа  $A_{\text{кр}}$  равна площади замкнутой фигуры  $(1-a-2-b-1)$ , ограниченной графиком процесса ( $A_{\text{кр}} = (A_{1a2} + A_{2b1}) > 0$ , рис. 2.9, в).

### 2.9.3. Теплообмен, теплоемкость системы

Под *теплообменом* (*теплопередачей*) понимают процесс обмена энергией между системой и внешними телами, при котором не происходит изменение объема системы, не перемещаются ее макроскопические части. Энергия, получаемая или отдаваемая системой при таком процессе, называется количеством теплоты. Если система получает теплоту, то она считается положительной, если отдает — отрицательной.

Для расчета количества теплоты, получаемой или отдаваемой системой, вводится понятие *теплоемкости системы*

$$C = \frac{\delta Q}{dT}. \quad (2.42)$$

Теплоемкость системы  $C$  равна количеству теплоты, которое необходимо сообщить системе, чтобы нагреть ее на один градус.

Вводятся также удельная ( $c$ ) и молярная ( $c_M$ ) теплоемкости системы

$$c = \frac{C}{m} = \frac{\delta Q}{m dT}, \quad c_M = \frac{C}{\nu} = \frac{\delta Q}{\nu dT}, \quad (2.43)$$

где  $m$  — масса системы, а  $\nu$  — количество вещества.

При известных теплоемкостях системы можно рассчитать количество теплоты, которое получает (отдает) система при нагревании (охлаждении).

$$\delta Q = CdT = cmdT = c_M \nu dT. \quad (2.44)$$

Количество теплоты, полученное (отданное) системой при плавлении (кристаллизации) и парообразовании (конденсации), можно рассчитать соответственно по формулам:

$$\delta Q = \lambda dm, \quad \delta Q = r dm, \quad (2.45)$$

где используются определяемые из опыта удельные теплоты плавления  $\lambda$  и парообразования  $r$ :  $\lambda = \delta Q / m$ ,  $r = \delta Q / m$ .

## 2.10. Первый закон термодинамики и его применение к различным процессам

### 2.10.1. Первое начало термодинамики

Первый закон (начало) термодинамики является законом сохранения энергии в тепловых процессах. Согласно *первому закону термодинамики количество теплоты, подведенное к системе, идет на изменение ее внутренней энергии и на работу, совершаемую системой над внешними телами.*

$$\delta Q = dU + \delta A . \quad (2.46)$$

Формула (2.46) записана для элементарных процессов, при которых происходит бесконечно малое изменение параметров системы. В этом выражении  $\delta Q$  и  $\delta A$  означают элементарное количество теплоты и элементарную работу в ходе процесса, при котором внутренняя энергия системы изменилась на бесконечно малую величину  $dU$ . Символ « $\delta$ » указывает на то, что количество теплоты  $Q$  и работа  $A$  являются функциями процесса. Символ « $d$ » указывает на то, что внутренняя энергия  $U$  является функцией состояния (т. е. ее изменение зависит только от начального и конечного состояния системы и не зависит от способа перехода системы из начального в конечное состояние).

Первое начало термодинамики для процесса, при котором изменение параметров системы является конечным, можно записать в виде

$$Q = \Delta U + A . \quad (2.47)$$

### 2.10.2. Применение первого начала термодинамики к различным процессам

Запишем прежде всего формулы, которые будут использоваться при рассмотрении различных процессов в идеальном газе.

$$U = \frac{i}{2} \nu RT, \quad \Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T, \quad A = \int_{V_1}^{V_2} p dV, \quad Q = \Delta U + A, \quad pV = \nu RT . \quad (2.48)$$

1. *Изотермический процесс*:  $T = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ ;  $pV = \text{const}$  — уравнение процесса.

$$\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T = 0;$$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu RT \ln \frac{p_1}{p_2}, \quad Q = A. \quad (2.49)$$

2. *Изохорический процесс*:  $V = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ ;  $p/T = \text{const}$  — уравнение процесса.

$$\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T = \frac{i}{2} V \Delta p, \quad A = 0, \quad Q = \Delta U. \quad (2.50)$$

3. *Изобарический процесс*:  $p = \text{const}$ ,  $m = \text{const}$ ;  $V/T = \text{const}$  — уравнение процесса.

$$\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T = \frac{i}{2} p \Delta V, \quad A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1) = p \Delta V,$$

$$Q = \Delta U + A = \frac{i+2}{2} p \Delta V = \frac{i+2}{2} \nu R \Delta T. \quad (2.51)$$

4. *Адиабатический процесс* — это процесс, происходящий в системе без теплообмена с внешними телами:  $Q_{12} = 0$ ;  $pV^\gamma = \text{const}$  — уравнение процесса, где  $\gamma = \frac{i+2}{i}$  — показатель адиабаты (коэффициент Пуассона)

$$\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T = \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1), \quad A = -\Delta U. \quad (2.52)$$

5. *Круговой процесс* — пройдя ряд изменений, система вернулась в исходное состояние, поэтому итоговое изменение температуры  $\Delta T_{\text{кр}} = 0$ .

$$\Delta U_{\text{кр}} = \frac{i}{2} \nu R \Delta T_{\text{кр}} = 0, \quad Q_{\text{кр}} = A_{\text{кр}}. \quad (2.53)$$

### 2.10.3. Зависимость теплоемкости системы от вида процесса. Уравнение Майера

Зависимость количества теплоты от вида происходящего процесса приводит к аналогичной зависимости и теплоемкости системы. Поэтому вводят различные теплоемкости, описывающие протекание процессов при постоянном объеме ( $C_V$ ), давлении ( $C_P$ ), температуре ( $C_T$ ) и т. д.

Рассчитаем молярные теплоемкости газа в различных изопроцессах:

1. *Изотермический процесс:*

$$c_{M_T} = \frac{\delta Q}{\nu dT} = \infty, \quad \text{т.к. } dT = 0. \quad (2.54)$$

2. *Изохорический процесс:*

$$c_{M_V} = \frac{\delta Q}{\nu dT} = \frac{dU}{\nu dT} = \frac{i\nu R dT}{2\nu dT} = \frac{i}{2} R, \quad (2.55)$$

где при выводе выражения для  $c_{M_V}$  были использованы формулы (2.50).

3. *Изобарический процесс:*

$$c_{M_P} = \frac{\delta Q}{\nu dT} = \frac{dU + \delta A}{\nu dT} = \frac{(i+2)\nu R dT}{2\nu dT} = \frac{(i+2)}{2} R, \quad (2.56)$$

где при выводе выражения для  $c_{M_P}$  были использованы формулы (2.51).

4. *Адиабатический процесс:*

$$c_{M_{\text{ад}}} = \frac{\delta Q}{\nu dT} = 0, \quad \text{т.к. } dQ = 0. \quad (2.57)$$

Отметим, что исходя из формул (2.56) и (2.55) разность теплоемкостей  $c_{M_P}$  и  $c_{M_V}$  для идеального газа равна

$$c_{M_P} - c_{M_V} = R. \quad (2.58)$$

Уравнение (2.58) получило название уравнения Майера.

## 2.11. Второе начало термодинамики

---

---

### 2.11.1. Некоторые формулировки второго начала термодинамики

По мере развития термодинамики этот закон (начало), как обобщение опытных фактов, формулировался разными учеными по-разному, но все эти формулировки отражали необратимость протекания процессов в природе.

Приведем некоторые из этих формулировок.

1. Невозможен процесс, единственным результатом которого является переход тепла от холодного тела к горячему (Клаузиус).

Следующие формулировки (под номерами 2, 3, 4, 5, 6) в явном виде устанавливают неэквивалентность двух форм передачи энергии в виде тепла (неупорядоченная форма передачи энергии) и работы (упорядоченная форма), что приводит к необратимости протекания процессов в природе. Их неэквивалентность связана с различием тепловой формы движения материи и упорядоченной формой ее движения. Так, неупорядоченная форма движения материи приводит к диссипации энергии, к невозможности полного перехода ее в упорядоченную форму движения материи — работу.

2. Невозможен процесс, единственным результатом которого является совершение работы за счет охлаждения одного тела (Томсон).

3. Невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является превращение теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу.

4. Невозможен вечный двигатель второго рода, т. е. такое устройство, которое превращало бы тепло в работу полностью (Оствальд).

5. Каждый тепловой двигатель должен содержать в своем составе охладитель.

6. Коэффициент полезного действия тепловой машины не может быть равен единице.

Приведем еще одну возможную формулировку второго начала термодинамики.

7. Невозможен процесс самопроизвольного перехода тепловой энергии в другие виды энергии. Приведем пример, подтверждающий эту формулировку. Пусть шарик катится по горизонтальному столу. С течением времени за счет работы силы трения его механическая энер-

гия перейдет в тепловую энергию стола и шарика. Обратный процесс самопроизвольно не протекает, т. е. шарик за счет своей внутренней энергии теплового движения не начнет двигаться по столу.

### 2.11.2. Энтропия в термодинамике

Ряд термодинамических формулировок второго начала термодинамики содержит понятие энтропии системы. При развитии термодинамики оказалось, что помимо внутренней энергии системы функцией состояния системы также является величина, которая для равновесных процессов вводится (это было сделано Клаузиусом) по формуле

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}, \quad dS = \delta Q / T. \quad (2.59)$$

Следовательно, эта величина не зависит от пути перехода из одного состояния в другое, она получила название энтропия. Величину  $(\delta Q / T)$  в формуле (2.59) называют приведенной теплотой.

Из формулы (2.59) следует, что источником изменения энтропии системы является теплообмен между системой и внешними телами. В зависимости от вида равновесного процесса, происходящего в системе, энтропия системы может как возрастать (тепло подводится к системе), так и убывать (тепло отводится от системы).

Оказалось, что существует еще один источник изменения энтропии, он связан с протеканием в системе неравновесного процесса. Клаузиус показал, что при протекании неравновесного процесса в замкнутой (изолированной) системе ее энтропия возрастает. Поэтому для изменения энтропии системы с учетом возможности протекания в ней неравновесного процесса равенство (2.59) запишется следующим образом:

$$\Delta S \geq \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{необр}}}{T}. \quad (2.60)$$

Эта формула (2.60) является важной для анализа протекания необратимых процессов в замкнутых (или изолированных) системах (нет теплообмена между системой и окружающими телами —  $\delta Q = 0$ ), для них  $\Delta S \geq 0$ .

Дадим формулировку второго начала термодинамики с использованием понятия энтропии (Клаузиус): энтропия замкнутой системы стремится к максимуму:

$$\Delta S \geq 0. \quad (2.61)$$

Из опыта известно, что если замкнутая (или изолированная) система сначала находилась в неравновесном состоянии, то с течением времени в ней протекают процессы перехода в равновесное состояние, в состояние теплового равновесия. При таком процессе энтропия системы возрастает ( $\Delta S \geq 0$ ). Когда система переходит в равновесное состояние, энтропия достигает максимального значения, которое с течением времени остается неизменным ( $\Delta S = 0, S = \text{const}$ , рис. 2.10).

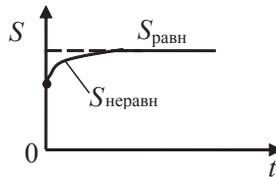


Рис. 2.10

Следовательно, в таких системах невозможен процесс перехода системы из равновесного состояния в неравновесное, так как при этом энтропия будет убывать, что запрещено вторым началом термодинамики. Отсюда следует, что важное свойство энтропии системы — помимо того, что она является функцией состояния, она также определяет направление протекания процессов в замкнутых системах.

Наиболее полно физический смысл энтропии раскрывается в статистической (молекулярной) физике. В дальнейшем будут даны формулировки второго начала термодинамики с точки зрения молекулярного строения вещества.

### 2.11.3. Расчет изменения энтропии для изопроцессов

Формулы (2.46), (2.59) позволяют рассчитать изменение энтропии для разных изопроцессов.

1. *Изотермический процесс:*

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta A}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{pdV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu R dV}{V} = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu R \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (2.62)$$

2. *Изохорический процесс:*

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{i\nu R dT}{2T} = \frac{i}{2} \nu R \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{i}{2} \nu R \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (2.63)$$

3. *Изобарический процесс:*

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{(i+2)\nu R dT}{2T} = \\ &= \frac{i+2}{2} \nu R \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{i+2}{2} \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

4. *Адиабатный процесс:*

Так как теплота не подводится ( $\delta Q = 0$ ), то во всех равновесных адиабатных процессах

$$\Delta S = 0, \quad S = \text{const}. \quad (2.65)$$

Такие процессы называются изоэнтропийными.

Выведем формулу уравнения адиабатического процесса

$$\begin{aligned} dU + \delta A &= 0, \quad \Rightarrow \nu c_{MV} dT + pdV = 0, \quad pV = \nu RT, \\ d(pV) &= pdV + Vdp = \nu R dT \Rightarrow \\ \Rightarrow dT &= \frac{1}{\nu R} (pdV + Vdp), \quad \frac{c_{MV}}{R} (pdV + Vdp) + pdV = 0, \\ \left( \frac{c_{MV}}{R} + 1 \right) pdV + \frac{c_{MV}}{R} Vdp &= 0 \quad \left| \times \frac{1}{pV} \Rightarrow \frac{c_{MV} + R}{c_{MV}} \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0, \right. \\ \gamma \cdot d(\ln V) + d(\ln p) &= 0; \quad d(\ln(pV^\gamma)) = 0 \Rightarrow pV^\gamma = \text{const}. \end{aligned}$$

Итак, уравнение адиабаты в параметрах состояния ( $p, V$ ) принимает вид:

$$pV^\gamma = \text{const},$$

а для других параметров идеального газа запишется таким образом:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{const}. \quad (2.66)$$

При выводе был введен коэффициент Пуассона  $\gamma$ , который равен отношению молярной теплоемкости идеального газа при постоянном давлении к молярной теплоемкости газа при постоянном объеме

$$\gamma = \frac{C_{MP}}{C_{MV}} = \frac{i+2}{i}, \quad (2.67)$$

причем он выражается через число степеней свободы молекулы идеального газа.

В координатах ( $p, V$ ) адиабата изменяется более резко, чем изотерма, так как коэффициент Пуассона  $\gamma$  больше единицы ( $\gamma > 1$ , рис. 2.11, а).

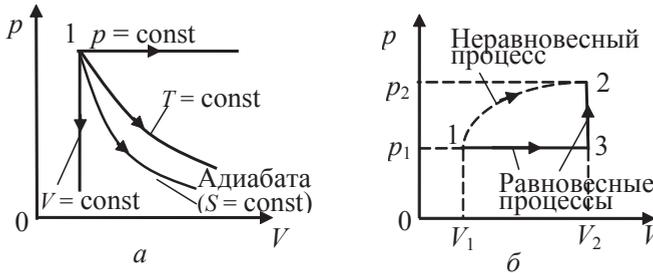


Рис. 2.11

Использование уравнения адиабаты помимо формулы (2.52) позволяет получить следующую формулу для работы идеального газа при адиабатическом процессе:

$$A_{12} = \int_1^2 p dV = \int_1^2 \frac{p_1 V_1^\gamma dV}{V^\gamma} = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left( 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right) = \frac{\nu RT_1}{\gamma - 1} \left( 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right). \quad (2.68)$$

### 2.11.4. Примеры расчета изменения энтропии для неравновесных процессов

Если необходимо рассчитать изменение энтропии произвольного неравновесного процесса перехода системы (идеальный газ) из одного состояния (параметры состояния  $p_1V_1$ ) в другое (параметры состояния  $p_2V_2$ ), необходимо использовать тот факт, что энтропия является функцией состояния системы, и рассчитать изменение энтропии для равновесного процесса перехода. Этот процесс наиболее удобен, так как состоит из нескольких изопроцессов (например, изобарический 1–3 и изохорический 3–2, рис. 2.11, б), что позволяет использовать формулы, приведенные в п. 2.2.4 пункт 1 ( $V_3 = V_1, p_3 = p_1$ ):

$$\begin{aligned}\Delta S_{12\text{равн}} &= \Delta S_{13} + \Delta S_{32} = \left(\frac{i}{2} + 1\right)vR \ln \frac{V_3}{V_1} + \frac{i}{2}vR \ln \frac{p_2}{p_3} \\ &= \left(\frac{i}{2} + 1\right)vR \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{i}{2}vR \ln \frac{p_2}{p_1}.\end{aligned}\quad (2.69)$$

Как видно, в расчетную формулу (2.69) входят только параметры начального и конечного состояний.

Если в процессе теплообмена системы с внешними телами происходит нагревание (охлаждение), плавление (кристаллизация) вещества, превращение жидкости в пар (или конденсация), то количество теплоты  $Q$ , необходимое для расчета изменения энтропии, рассчитывается по формулам (2.45), (2.46).

В качестве примера рассмотрим процесс, происходящий в системе за счет теплообмена с внешними телами: процесс нагревания льда массой  $m$  от температуры  $T_1$  ( $T_1 < 273$  К) до температуры  $T_2$  ( $T_2 > 273$  К). Тогда для расчета изменения энтропии системы мы используем равновесные процессы и рассчитываем  $\Delta S$  следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta S_{\text{равн}} &= \Delta S_{\text{нагрева льда}} + \Delta S_{\text{плавл}} + \Delta S_{\text{нагрева воды}} = \\ &= \int_{T_1}^{273} \frac{\delta Q_{\text{нагрева}}}{T} + \frac{Q}{273} + \int_{273}^{T_2} \frac{\delta Q_{\text{нагрева}}}{T} = c_{\text{льда}} m \ln \frac{273}{T_1} + \frac{m\lambda}{273} + c_{\text{воды}} m \ln \frac{T_2}{273}.\end{aligned}$$

### 2.11.5. Термодинамическая вероятность. Статистический смысл понятия энтропии

В термодинамике (см. п. 2.11.2) было выяснено, что энтропия определяет направление протекания процессов в замкнутых системах.

В статистической физике энтропия системы раскрывается с другой стороны, ее можно связать с тепловым движением молекул. Рассуждения при этом будут следующими.

Если система самопроизвольно переходит из неравновесного состояния в равновесное, то это означает, что она самопроизвольно переходит из состояний менее вероятных в состояния более вероятные, причем равновесное состояние обладает наибольшей вероятностью, так как в нем система может находиться сколь угодно долго при неизменных внешних условиях.

Следовательно, *необратимость процессов связана с переходом системы из состояний менее вероятных в состояния более вероятные*. Существует возможность протекания и обратных процессов, при которых система переходит из более вероятных состояний в менее вероятные, но вероятность осуществления таких процессов будет чрезвычайно малой.

Для того чтобы количественно оценить вероятность различных состояний системы, вводят понятие *термодинамической вероятности (статистического веса)*  $\Omega$  — это число микросостояний системы, которые соответствуют данному макросостоянию системы. Причем, по определению,  $\Omega \geq 1$ .

В статистической физике принята гипотеза о том, что все микросостояния данной системы являются равновероятными. Это означает, что *вероятность макросостояния пропорциональна ее термодинамической вероятности  $\Omega$* .

Молекулы, участвуя в тепловом движении, со временем хаотично движутся и непрерывно изменяют свои координаты и скорости. Поэтому данному макросостоянию системы будет соответствовать чрезвычайно большое число микросостояний, которое не так просто оценить.

Относительно термодинамической вероятности  $\Omega$  можно отметить следующее:

- 1) так же, как и энтропия,  $\Omega$  возрастает при переходе замкнутой системы из неравновесного состояния в состояние равновесия;
- 2) она так же, как и энтропия, является наибольшей в состоянии равновесия;

3) так же, как и энтропия,  $\Omega$  является функцией состояния системы;  
 4) она характеризует степень хаотичности в движении молекул по координатам и скоростям;

5) в отличие от энтропии,  $\Omega$  является мультипликативной функцией состояния системы, т. е. для системы, состоящей из двух взаимодействующих подсистем, она равна произведению термодинамических вероятностей этих подсистем ( $\Omega = \Omega_1 \Omega_2$ ).

Энтропия же является аддитивной функцией состояния системы, т. е. энтропия системы, состоящей из двух взаимодействующих частей, равна сумме энтропий этих частей ( $S = S_1 + S_2$ ).

Сравнивая свойства энтропии и термодинамической вероятности, можно заметить много общего между ними. Больцман показал, что введенное в термодинамике понятие энтропии связано с термодинамической вероятностью формулой

$$S = k \ln \Omega, \quad (2.70)$$

где  $\sigma_{12}$  — постоянная Больцмана.

Отметим, что входящее в формулу выражение  $\ln \Omega$ , так же как и энтропия, является аддитивной величиной.

Записанная формула раскрывает статистический смысл энтропии, а именно: *энтропия системы является мерой хаотичности в движениях молекул по координатам и скоростям*. Формула (2.70) позволяет также провести оценку энтропии для неравновесных состояний.

Приведем формулировку второго начала термодинамики с точки зрения статистической физики — *в замкнутой системе вероятнее всего протекают процессы с увеличением энтропии, процессы с уменьшением энтропии маловероятны*.

Эта формулировка носит вероятностный смысл, она не запрещает протекание процессов, происходящих с уменьшением энтропии, они могут протекать в замкнутой системе, но будут маловероятными.

### 2.11.7. Флуктуации

Согласно молекулярной физике, которая придает вероятностный характер протеканию процессов в системе, в состоянии равновесия в замкнутой системе возможно протекание процессов, при которых

в разных частях ее объема энтропия может убывать, хотя в среднем для всей системы она остается постоянной. Это приводит к тому, что в разных частях системы наблюдаются отклонения термодинамических параметров (концентрации, температуры, давления и т. д.) системы от их средних значений. Такие *отклонения термодинамических параметров системы от их средних значений на основе теплового движения молекул называют флуктуациями*.

Так, например, давление идеального газа в состоянии равновесия в среднем остается постоянным. Однако со временем оно будет изменяться, флуктуировать (см. рис. 2.12, а). Это связано с тем, что в данный момент времени о стенку ударяется разное число молекул, что и приводит к отклонению давления от его среднего значения.

Для количественного описания флуктуаций вводится дисперсия (квадратичная флуктуация)  $\sigma_x^2$ , т. е. средний квадрат отклонения величины  $x$  от среднего значения  $\langle x \rangle$ :  $\sigma_x^2 = \langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ , абсолютная ( $\sigma_x = \sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle}$ ) и относительная ( $\delta_x = \sigma_x / \langle x \rangle$ ) флуктуации.

При большом числе  $N$  частиц системы, описывающие ее физические величины (давление, температура, концентрация молекул), практически не отклоняются от своих средних статистических значений. Это связано с тем, что относительные флуктуации  $\delta_x$  будут пропорциональны  $1/\sqrt{N}$ . Так, например, число молекул (число Лошмидта) идеального газа в объеме  $V = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$  при нормальных условиях равно  $N_{\text{л}} = 2,68 \cdot 10^{19}$ , что приводит к относительной флуктуации, равной  $\delta_x \approx 2 \cdot 10^{-10}$ .

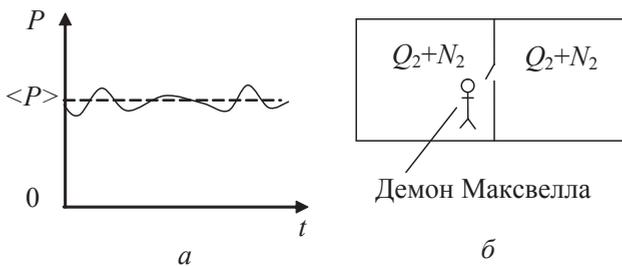


Рис. 2.12

Однако для малых объемов системы флуктуации могут быть достаточно большими и будут приводить к наблюдаемым эффектам. Например, голубой цвет неба связан с молекулярным рассеянием света

на флуктуациях плотности воздуха. При этом интенсивность рассеянного света прямо пропорциональна четвертой степени частоты падающего излучения (закон Рэлея). Поэтому наиболее интенсивно будет рассеиваться коротковолновая часть видимого диапазона излучения (белого света), что и приводит к голубому цвету неба.

Действительно, при рассмотрении процессов рассеяния видимого света необходимо выбирать объемы, линейные размеры которых сопоставимы с длиной волны проходящего атмосфере излучения:  $\Delta V \approx \lambda^3 = (5 \cdot 10^{-7} \text{ м})^3 \approx 1 \cdot 10^{-13} \text{ см}^3$ . Такой объем воздуха содержит число молекул, равное примерно  $N \approx 3 \cdot 10^6$ , что дает для относительной флуктуации концентрации молекул значение  $\delta_n \approx 6 \cdot 10^{-4} = 0,06\%$ . Такая относительная флуктуация является достаточно большой, что и вызывает изменение частотного состава проходящего атмосфере видимого света.

Другим примером проявления флуктуаций являются «шумы» в радиотехнических системах, под ними понимают случайные изменения (колебания) силы тока, напряжения, связанные с хаотическим движением электронов внутри металла. Частотный спектр этого шума охватывает всевозможные значения частот от нуля и выше, что приводит к уменьшению чувствительности радиоаппаратуры. При комнатной температуре интенсивность тепловых шумов остается постоянной до частот  $\nu \approx 10^{12}$  Гц.

*Демон Максвелла.* При развитии термодинамики в связи с ее статистическим обоснованием возникла дискуссия о возможности обойти второе начало термодинамики с помощью флуктуаций. Одним из рассматриваемых в то время примеров, позволяющих обойти второй закон термодинамики, был следующий. Внутри системы, разделенной на две части перегородкой, находилась смесь двух газов (например, азота и кислорода). Там же находился демон Максвелла — живое существо, которое могло использовать флуктуации плотности газов для его разделения (см. рис. 2.12, б). В перегородке было отверстие с крышкой. Когда к отверстию подлетала порция газа, в которой было больше кислорода, демон открывал отверстие и пропускал эту порцию газа и, соответственно, не пропускал порцию газа, где было больше азота. Работая таким образом достаточно долго, демон мог обойти второе начало термодинамики, т. е. разделить газы в замкнутой системе.

Однако оказалось, что этого не происходит. Если бы демон был ма-

леньким, то он сам бы испытывал флуктуации и не смог бы открыть крышку в нужное время. Если бы он был большим, то не чувствовал бы эти флуктуации. Таким образом, с помощью флуктуаций нельзя нарушить второй закон термодинамики.

### 2.12. Третье начало термодинамики

---

---

Третье начало (закон) термодинамики вытекает из формулы (2.70) для энтропии. Известно, что при температуре, равной абсолютному нулю температур ( $T = 0$  К), тепловое движение отсутствует и за счет действия сил потенциального поля система занимает только одно возможное состояние — состояние с минимальной энергией. Поэтому термодинамическая вероятность будет равна единице (этому состоянию соответствует только одно микросостояние) и в соответствии с формулой (2.70) можно записать

$$S = k \ln \Omega = k \ln 1 = 0 \Rightarrow (T = 0 \text{ К}): S = 0. \quad (2.71)$$

Итак, третий закон термодинамики формулируется таким образом — *энтропия системы при абсолютном нуле температур равна нулю.*

Существуют другие, эквивалентные, формулировки третьего закона термодинамики: *абсолютный ноль температур недостижим; за конечное число шагов нельзя достичь абсолютного нуля температур.*

### 2.13. Тепловые двигатели. Идеальный тепловой двигатель

---

---

Тепловой двигатель — это устройство, превращающее тепловую энергию топлива в механическую работу. На рис. 2.13 показана блок-схема теплового двигателя. Нагреватель сообщает рабочему телу (это пар или газ) количество теплоты  $Q_H$ , за счет которого рабочее тело совершает работу, а неизрасходованное при этом тепло  $Q_X$  передает холодильнику. При этом коэффициент полезного действия теплового двигателя будет меньше единицы.

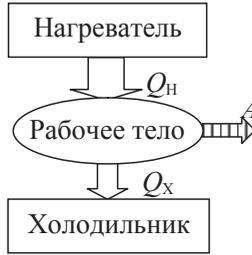


Рис. 2.13

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{Q_H - |Q_X|}{Q_H} = 1 - \frac{|Q_X|}{Q_H} < 1. \quad (2.72)$$

Если взять круговые процессы, для которых разность между максимальной и минимальной температурой будет одинаковой, то среди них максимальный КПД будет у теплового двигателя, работающего по *циклу Карно*. Такой двигатель назвали *идеальным*. Цикл Карно состоит из двух изотерм и двух адиабат, его графики в координатах  $(p, V)$  и  $(T, S)$  приведены на рис. 2.14, а, б.

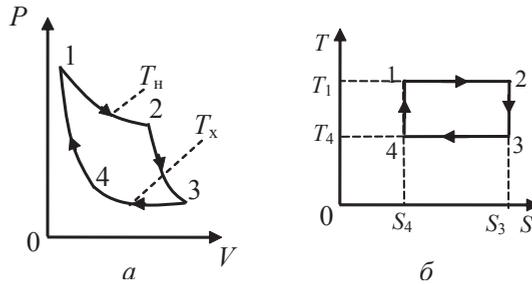


Рис. 2.14

В состоянии 1 рабочее тело приводится в тепловой контакт с нагревателем при температуре  $T_H$ . Происходит процесс изотермического расширения газа, в ходе которого он получает от нагревателя количество теплоты  $Q_H$ . В состоянии 2 рабочее тело отключается от нагревателя и дальнейшее расширение происходит адиабатически. При этом газ совершает работу за счет убыли своей внутренней энергии и его температура понижается. Когда она становится равной температуре холодильника  $T_X$  (состояние 3), рабочее тело приводят в тепловой контакт с ним и проводят изотермическое сжатие газа, в ходе которого рабо-

чее тело отдает холодильнику количество теплоты  $Q_X$ . Этот процесс осуществляют до тех пор, пока газ не окажется в состоянии 4, из которого он может быть переведен с исходное состояние 1 путем адиабатического сжатия.

Рассчитаем КПД идеального теплового двигателя. Для этого выделим отдельные вклады в изменение энтропии рабочего тела (газа) и учтем, что изменение энтропии на замкнутом цикле будет равно нулю

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{круг}} &= \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41} = \int_1^2 \frac{\delta Q_T}{T} + 0 + \int_3^4 \frac{\delta Q_T}{T} + 0 = \frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_X}{T_X} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{|Q_X|}{Q_H} = \frac{T_X}{T_H} \Rightarrow \eta_{\text{КАРНО}} = 1 - \frac{|Q_X|}{Q_H} = 1 - \frac{T_X}{T_H}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Из полученной формулы (2.73) следует, что КПД обратимого цикла Карно не зависит от природы рабочего тела.

### Вопросы и задания для самоконтроля к разделу «Молекулярная физика и термодинамика»

1. Каков физический смысл функции распределения Максвелла? Перечислите физические величины, входящие в эту функцию. Куда сместится максимум функции распределения молекул идеального газа по скоростям (распределение Максвелла), если, не меняя температуры, взять другой газ с большей молярной массой и таким же числом молекул?
2. Запишите выражение для средней квадратичной скорости. Во сколько раз увеличивается средняя квадратичная скорость  $\langle v_{\text{кв}} \rangle$  молекул при возрастании температуры системы в четыре раза?
3. Запишите выражение для наиболее вероятной скорости. Каков ее физический смысл? Три газа: водород ( $M_1 = 2$  г/моль), гелий ( $M_2 = 4$  г/моль) и кислород ( $M_3 = 32$  г/моль) находятся при одинаковой температуре  $T$ . У какого газа наиболее вероятная скорость  $v_{\text{вер}}$  наибольшая?
4. Запишите выражение для барометрической формулы. Чему равна высота над поверхностью Земли, на которой concentra-

- ция молекул воздуха уменьшается вдвое? При расчетах принять, что температура воздуха  $t = 20^\circ\text{C}$ , молярная масса воздуха  $M = 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль. Температура воздуха и ускорение свободного падения ( $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>) по всей высоте постоянны.
5. Запишите выражение для распределения Больцмана. Поясните величины, входящие в формулу. Что описывает это распределение?
  6. Какая энергия называется внутренней? От чего зависит величина внутренней энергии? Какими способами можно ее изменить? Как подсчитать внутреннюю энергию двухатомного идеального газа массой  $m$  при известной температуре?
  7. Какое явление называется теплопередачей? Что такое количество теплоты?
  8. Сформулируйте первое начало термодинамики. Запишите уравнения, выражающие первое начало термодинамики для изобарического и кругового процессов в идеальных газах?
  9. Сформулируйте определение молярной теплоемкости идеального газа. Запишите выражение для молярных теплоемкостей идеального газа при постоянном давлении и постоянном объеме. Имеются четыре газа ( $\text{NH}_3$ ,  $\text{Ar}$ ,  $\text{CO}$ ,  $\text{O}_2$ ). У какого газа молярная теплоемкость при постоянном объеме будет наибольшей?
  10. Сформулируйте определение работы в термодинамике. Запишите формулу для расчета работы. Термодинамическая система совершила круговой процесс. Будет ли равна нулю работа на круговом процессе? Свой ответ поясните.
  11. Что такое термодинамическая вероятность? Сформулируйте определение энтропии. Какой статистический смысл понятия энтропии?
  12. Сформулируйте второе начало термодинамики.
  13. Какой физический смысл энтропии? Какой процесс называется изоэнтропийным? Как изменяется энтропия идеального газа постоянной массы в процессе его адиабатического сжатия?
  14. Каковы физические основы работы теплового двигателя? Чему равен его КПД?
  15. Запишите формулу для коэффициента полезного действия идеальной тепловой машины. Коэффициент полезного действия идеальной тепловой машины равен 30%. Если температура холодильника равна  $7^\circ\text{C}$ , то чему равна температура нагревателя?

## 3. Электричество

---

---

### 3.1. Электростатика

---

---

#### 3.1.1. Электрический заряд. Закон Кулона

**В** отличие от гравитационного, в электромагнитное взаимодействие вступают не все тела и частицы. Тем из них, которые участвуют в таких взаимодействиях, приписывается новое свойство — *электрический заряд*. Он может быть положительным или отрицательным, отражая тот факт, что электромагнитное взаимодействие может быть в виде взаимного притяжения разноименных зарядов или отталкивания одноименных зарядов. Таким образом, *электрический заряд характеризует способность тел вступать в электромагнитные взаимодействия, а его величина определяет интенсивность этих взаимодействий*.

В природе в свободном состоянии существуют частицы, имеющие минимальный по модулю заряд, равный  $q_{\min} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Поэтому заряды всех тел и частиц, вступающих в электромагнитные взаимодействия, состоят из целого числа таких зарядов

$$Q = \pm Nq_{\min}, \quad (3.1)$$

где  $N$  — целое число. В этом заключается *дискретность электрического заряда*. Заряд электрона считается отрицательным, что позволяет достаточно просто установить знаки зарядов других частиц.

В замкнутых системах выполняется *закон сохранения электрического заряда*, который формулируется следующим образом: *алгебраическая сумма электрических зарядов частиц замкнутой системы остается постоянной*

$$q_1 + q_2 + \dots = \text{const}. \quad (3.2)$$

Этот закон является важным, так как позволяет анализировать процессы, происходящие в замкнутых системах при изменении в них числа частиц.

Введение электрического заряда позволило сформулировать *закон Кулона*: силы, с которыми взаимодействуют два неподвижных точечных заряда в вакууме, прямо пропорциональны произведению их зарядов и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними; силы направлены вдоль прямой, соединяющей эти заряды (см. рис. 3.1, а):

$$\vec{F}_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}, \quad F_1 = F_2 = F_k = \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (3.3)$$

Входящая в формулу (3.3) величина  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$  называется электрической постоянной, она возникает при записи формулы закона в международной системе единиц СИ.

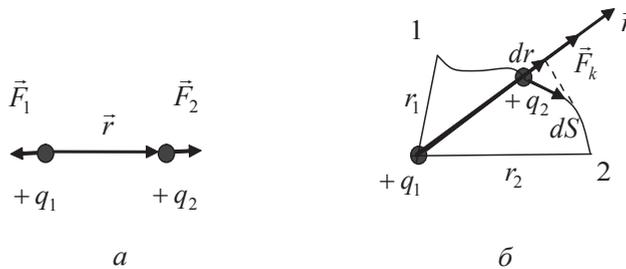


Рис. 3.1

Этот закон был экспериментально установлен в 1785 г. французским ученым Ш. Кулоном с помощью изобретенных им крутильных весов. Ранее в 70-х гг. XVIII века этот закон был открыт английским ученым Г. Кавендишем, но его труды были опубликованы лишь в 1879 г.

Известно, что по сравнению с вакуумом взаимодействие между зарядами в среде ослабевает и поэтому в закон Кулона вводят новую характеристику — *относительную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  среды*

$$F_k = \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}. \quad (3.4)$$

Параметр  $\epsilon$  описывает ослабление взаимодействия зарядов в среде, он показывает, во сколько раз модуль силы  $\vec{F}_{k_0}$  взаимодействия за-

рядов в вакууме больше модуля силы  $\vec{F}_k$  взаимодействия зарядов в среде ( $\varepsilon = F_{k_0}/F_k$ ). Для вакуума  $\varepsilon = 1$ , для всех сред  $\varepsilon > 1$ , но с достаточной степенью точности при проведении расчетов можно принять  $\varepsilon = 1$  для воздуха и других газов.

### 3.1.2. Вектор напряженности $\vec{E}$ электростатического поля, расчет $\vec{E}$ для электростатического поля точечного заряда

Из предыдущего рассмотрения следует, что на точечный заряд  $q$ , помещенный в электростатическое поле, действует кулоновская сила  $\vec{F}_k$ . Для расчета этой силы вводят вектор напряженности  $\vec{E}$ . *Напряженность электростатического поля  $\vec{E}$  — векторная физическая величина, являющаяся силовой характеристикой поля и равная отношению кулоновской силы, действующей на пробный положительный заряд, помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_k}{q_0}. \quad (3.5)$$

Для произвольного электростатического поля  $\vec{E}$  можно определить экспериментально. Для этого нужно в каждую точку поля помещать пробный положительный заряд  $q_0$ , найти опытным путем  $\vec{F}_k$ , а затем рассчитать  $\vec{E}$  по формуле (3.5).

Зная величину вектора напряженности в каждой точке поля, можно оценить  $\vec{F}_k$  по формуле:

$$\vec{F}_k = q\vec{E}. \quad (3.6)$$

При известном распределении зарядов, создающих электрическое поле, можно достаточно просто рассчитать  $\vec{E}$  на основе закона Кулона и принципа суперпозиции. Приведем вывод формулы для напряженности  $\vec{E}$  поля, созданного точечным зарядом.

Будем считать, что точечный заряд  $q_1$  создает электрическое поле, а точечный заряд  $q_2$  находится в этом поле. Тогда из формул (3.4), (3.6) следует:

$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} \vec{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{т.з}} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} \vec{r}, \quad E_{\text{т.з}} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}. \quad (3.7)$$

Формулы (3.7) определяют вектор напряженности  $\vec{E}$  поля точечного заряда.

На рис. 3.2 показаны направления векторов  $\vec{E}$  в разных точках поля точечного заряда (рис. 3.2, а, б) и приведен график зависимости модуля  $\vec{E}$  от расстояния  $r$  до заряда (рис. 3.2, в).

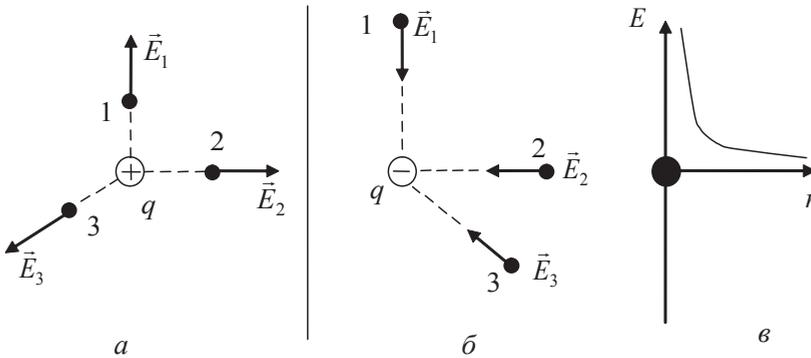


Рис. 3.2

Отметим, что направление вектора  $\vec{E}$  в данной точке поля совпадает с направлением кулоновской силы, действующей на пробный положительный заряд  $q_0$ , помещенный в данную точку.

### 3.1.3. Принцип суперпозиции электростатических полей.

#### Расчет $\vec{E}$ для электрического поля диполя и на оси равномерно заряженного кольца

Для расчета  $\vec{E}$  поля, созданного системой зарядов или макроскопическим заряженным телом, используют *принцип суперпозиции*. Он заключается в следующем: *вектор напряженности  $\vec{E}$  электрического*

поля, созданного несколькими зарядами, равен векторной сумме напряженностей полей, созданных каждым зарядом в отдельности ( $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots$ )

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots \quad (3.8)$$

В случае макроскопического заряженного тела для оценки  $\vec{E}$  в какой-либо точке  $A$  (рис. 3.3, *a*) разбивают тело на малые объемы (их можно рассматривать как точечные заряды  $dq$ ). Затем находят по формуле (3.7) вектора  $d\vec{E}$  от этих зарядов в т.  $A$  и проводят суммирование всех  $d\vec{E}$ , т. е. берут интеграл по объему  $V$  тела

$$\vec{E}_A = \int_V d\vec{E}; \quad d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} \vec{r}. \quad (3.9)$$

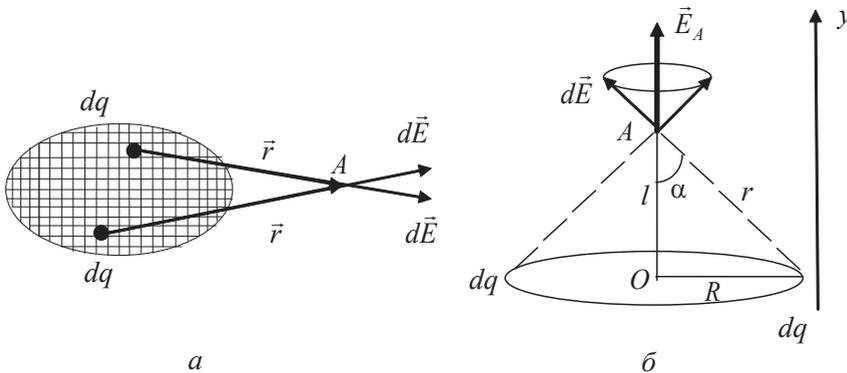


Рис. 3.3

Приведем примеры расчета напряженности электростатических полей с помощью формул (3.8) и (3.9).

**Пример 1.** Расчет напряженности поля, создаваемого электрическим диполем в т.  $A$ .

Под электрическим диполем понимают электронейтральную систему близко расположенных двух точечных зарядов, отстоящих друг от друга на расстоянии  $l$  (см. рис. 3.4, *a*). Для описания электрического поля, созданного диполем, вводят понятие дипольного момента  $\vec{p}$ . Дипольный момент — это вектор, направленный по прямой от заряда  $(+q)$  к заряду  $(-q)$ , т. е. по оси диполя, и равный по модулю произведению модуля одного из зарядов на расстояние  $l$  между ними

$$p = |q| l. \quad (3.10)$$

Обычно при описании поля диполя рассматривают точки, находящиеся на расстоянии  $r$ , значительно превышающем расстояние  $l$  между зарядами диполя ( $r \gg l$ ).

Рассчитаем модуль вектора  $\vec{E}$  в точке  $A$ , отстоящей от центра диполя (т.  $O$ ) на расстоянии  $r$  ( $r = OA$ , рис. 3.4, б)

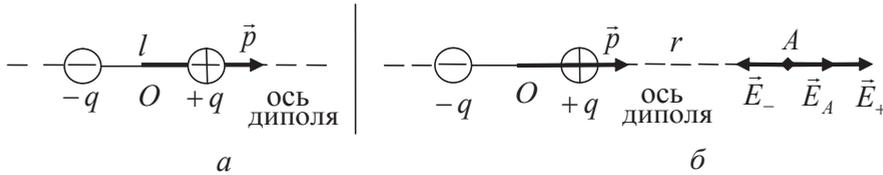


Рис. 3.4

Используя принцип суперпозиции (3.8), найдем направление и модуль вектора  $\vec{E}_A$  в т.  $A$  (рис. 3.4, б)

$$E_A = E_+ - E_- = \frac{|q|}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{1}{(r - l/2)^2} - \frac{1}{(r + l/2)^2} \right) = \quad (3.11)$$

$$= \frac{|q|}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{2rl}{(r - l/2)^2(r + l/2)^2} [r \gg l] = \frac{2p}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3}.$$

Из формулы (3.11) следует, что модуль вектора напряженности  $\vec{E}$  поля диполя на расстояниях  $r \gg l$  определяется модулем его дипольного момента  $\vec{p}$ , причем он уменьшается в зависимости от расстояния  $r$  быстрее, чем для поля точечного заряда (т. к.  $E_{\text{точеч}} \sim 1/r^2$ ,  $E_{\text{диполя}} \sim 1/r^3$ ).

**Пример 2.** Расчет электрического поля на оси равномерно заряженного кольца.

Пусть равномерно заряженное по длине кольцо радиусом  $R$  несет заряд  $q$ . Найдем направление и модуль вектора  $\vec{E}$  поля кольца в т.  $A$ , расположенной на оси кольца на расстоянии  $l$  от его центра (см. рис. 3.3, б).

Для этого разбиваем кольцо на малые участки — точечные заряды  $dq$ , определяем направление векторов  $d\vec{E}$  от всех зарядов  $dq$  в т.  $A$  и используем для расчета  $E_A$  формулу (3.9). Из симметрии задачи видно,

что все вектора  $d\vec{E}$  образуют конус векторов с углом  $\alpha$  при его вершине и суммарный вектор  $\vec{E}_A$  будет направлен вдоль оси вверх. Тогда

$$\vec{E}_A = \int d\vec{E};$$

$$\begin{aligned} \text{Oy: } E_A &= \int dE \cos \alpha = \int \frac{dq \cos \alpha}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} = \frac{\cos \alpha}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \int dq = \frac{q \cos \alpha}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} = \\ &= \frac{ql}{4\pi\epsilon\epsilon_0 (R^2 + l^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

где учтено, что

$$\cos \alpha = \frac{l}{r} = \frac{l}{(R^2 + l^2)^{1/2}}.$$

Итак, напряженность электрического поля в т.  $A$ , находящейся на оси заряженного кольца (см. рис. 3.3), вычисляется по формуле

$$E_A = \frac{ql}{4\pi\epsilon\epsilon_0 (R^2 + l^2)^{3/2}}. \quad (3.12)$$

Из формулы (3.10), в частности, следует, что в центре кольца, в т.  $O$  ( $l = 0$ ), напряженность электростатического поля

$$E_0 = 0.$$

На расстояниях  $l$ , значительно превышающих радиус  $R$  кольца ( $l \gg R$ ), его можно рассматривать как материальную точку, а электрическое поле кольца как поле точечного заряда. Действительно, пренебрегая в формулах (3.10)  $R^2$  по сравнению с  $l^2$ , получим:

$$l \gg R: \quad E_A = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 l^2}.$$

### 3.1.4. Силовые линии электростатического поля

Для графического изображения электростатических полей используют линии вектора  $\vec{E}$  (силовые линии электростатического поля) — они проводятся так, чтобы в каждой точке линии вектор  $\vec{E}$  был на-

правлен по касательной к ней (рис. 3.5). Линии вектора  $\vec{E}$  нигде не пересекаются, они начинаются на положительных зарядах, заканчиваются на отрицательных зарядах или уходят в бесконечность. Примеры графического изображения полей точечных зарядов приведены на рис. 3.5, б, в, г.

Видно, что для одного точечного заряда линии  $\vec{E}$  представляют собой прямые линии, выходящие или входящие в заряд. В случае однородного электрического поля (рис. 3.5, д), в каждой точке которого вектор  $\vec{E}$  одинаков и по модулю и по направлению, линии  $\vec{E}$  представляют собой прямые линии, параллельные друг другу и отстоящие друг от друга на одинаковом расстоянии.

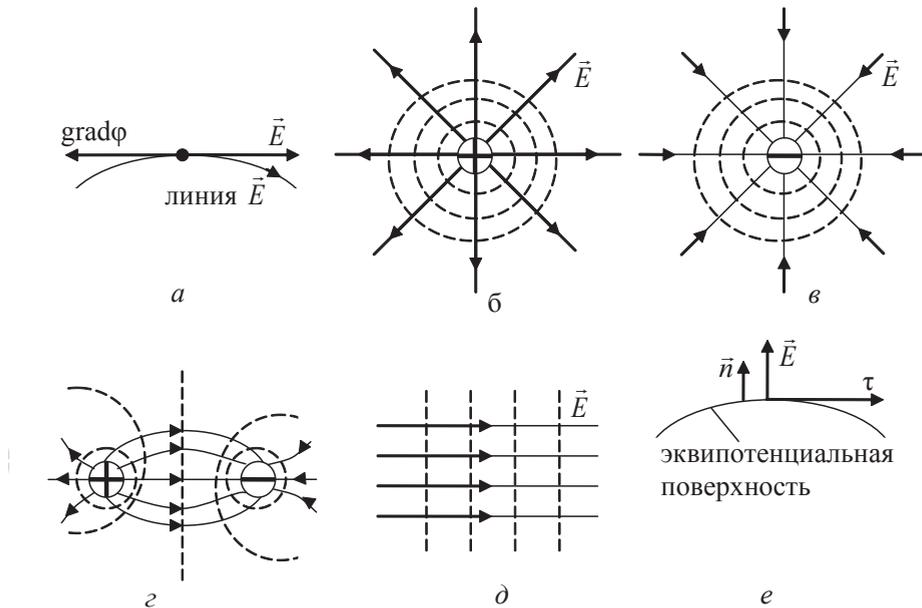


Рис. 3.5

Графическое изображение полей с помощью линий  $\vec{E}$  позволяет наглядно видеть направление кулоновской силы, действующей на точечный заряд, помещенный в данную точку поля, что является удобным для качественного анализа поведения заряда.

Обычно линии  $\vec{E}$  проводят так, чтобы их густота в каждой точке поля определяла числовое значение вектора  $\vec{E}$ . Под густотой линий  $\vec{E}$  понимают количество линий, пронизывающих перпендикулярную

к ним плоскую поверхность фиксированной площади. Поэтому по степени близости друг к другу линий  $\vec{E}$  можно судить об изменении модуля вектора  $\vec{E}$  и, соответственно, об изменении модуля кулоновской силы, действующей на заряженную частицу в электрическом поле.

### 3.1.5. Поток вектора $\vec{E}$ электростатического поля.

#### Теорема Гаусса – Остроградского для вектора $\vec{E}$

Возьмем произвольную поверхность  $S$  в неоднородном электростатическом поле (рис. 3.6, а). Тогда *поток*  $\Phi_E$  вектора  $\vec{E}$  через произвольную поверхность  $S$  называется следующее выражение:

$$\Phi_E = \int_S d\Phi_E = \int_S \vec{E} d\vec{S} = \int_S E dS \cos \alpha, \quad \alpha = \left( \vec{E}, \vec{n} \right). \quad (3.13)$$

Входящий в эту формулу вектор  $d\vec{S}$  определяется следующим образом. По модулю он равен площади  $dS$  элементарной площадки поверхности  $S$ . Вектор  $d\vec{S}$  направлен по вектору нормали  $\vec{n}$  к площадке  $dS$  (см. рис. 3.5, а).

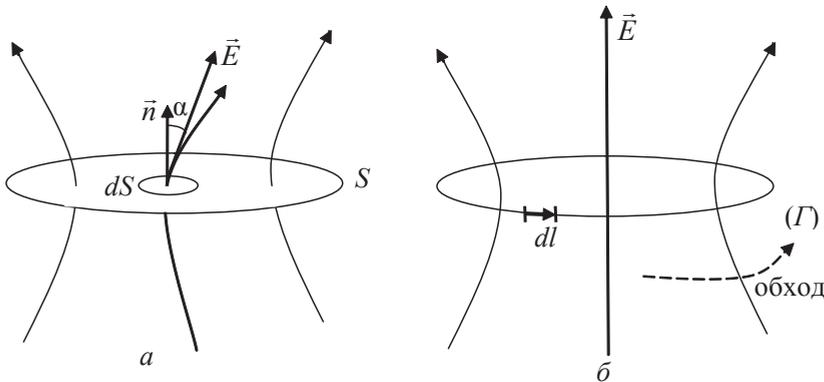


Рис. 3.6

Если учесть, что густота линий  $\vec{E}$  определяет модуль вектора  $\vec{E}$  в данной точке поля, то тогда поток вектора  $\vec{E}$  будет численно равен количеству  $N$  линий  $\vec{E}$ , пронизывающих поверхность  $S$ .

На рис. 3.7 приведены примеры расчета потока  $\Phi_E$  через различные поверхности  $S$  (на рис. 3.7, а, б, в поверхность  $S$  — плоская; на рис. 3.7, г поверхность  $S$  — замкнутая). В последнем случае поток  $\Phi_E$  через замкнутую поверхность равен нулю, так как количество линий  $\vec{E}$ , входящих ( $N_+$ ) и выходящих ( $N_-$ ) из нее, одинаково, но они берутся с противоположными знаками ( $\cos\alpha_+ > 0$ ,  $\cos\alpha_- < 0$ ).

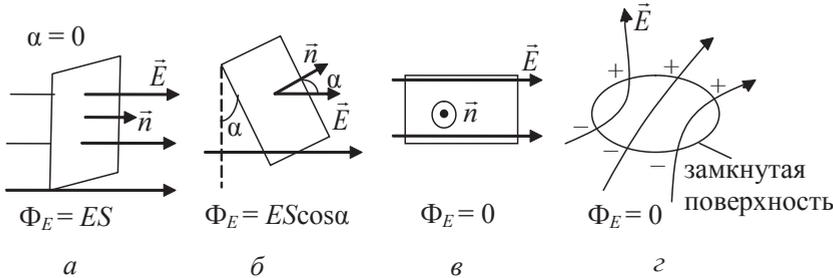


Рис. 3.7

Для вектора  $\vec{E}$  можно сформулировать *теорему Гаусса*, определяющую поток вектора  $\vec{E}$  через произвольную замкнутую поверхность.

*Теорема Гаусса формулируется следующим образом: поток вектора  $\vec{E}$  через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов  $q_\Sigma$ , охватываемых этой поверхностью, деленной на  $\epsilon\epsilon_0$*

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_\Sigma}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (3.14)$$

Эта теорема является следствием закона Кулона и принципа суперпозиции для электростатических полей.

Покажем справедливость теоремы для случая поля точечного заряда. Пусть замкнутая поверхность представляет собой сферу радиусом  $R$ , в центре которой находится точечный положительный заряд  $q$  (см. рис. 3.8, а).

Тогда поток вектора напряженности через выбранную поверхность равен

$$\oint_s E dS \cos\alpha = \oint_s \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dS \cos 0^\circ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \oint_s dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} 4\pi R^2 = q / \epsilon_0.$$

Полученный результат не изменится, если вместо сферы выбрать произвольную замкнутую поверхность (см. рис. 3.8, б), так как поток вектора  $\vec{E}$  численно равен количеству линий  $\vec{E}$ , пронизывающих поверхность, а число таких линий  $\vec{E}$  в случаях (а) и (б) одинаково.

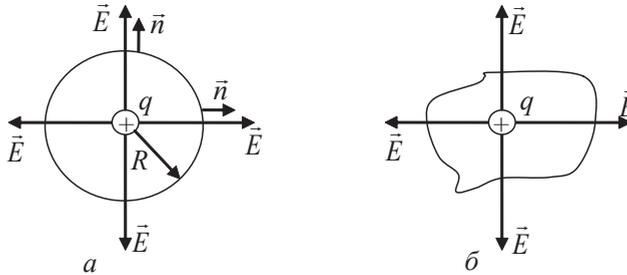


Рис. 3.8

Такие же рассуждения с использованием принципа суперпозиции электростатических полей можно привести и в случае нескольких зарядов, попадающих внутрь замкнутой поверхности, что и подтверждает теорему Гаусса.

### 3.1.6. Применение теоремы Гаусса — Остроградского для расчета электростатических полей

В случае электростатических полей, обладающих той или иной симметрией (осевая и сферическая симметрия, однородное поле), теорема Гаусса позволяет достаточно просто получить выражение для модуля вектора  $\vec{E}$ .

При применении теоремы Гаусса выделяют следующие этапы:

1) из симметрии распределения зарядов определяют направление вектора  $\vec{E}$  в каждой точке поля;

2) выбирают произвольную замкнутую поверхность и рассчитывают поток вектора  $\vec{E}$  через нее. Поверхность должна содержать внутри себя заряд (часть заряда), создающий поле, и отражать симметрию поля (цилиндр, сфера);

3) рассчитывают заряд, попадающий внутрь поверхности;

4) применяют теорему Гаусса для определения модуля вектора  $\vec{E}$ .

Рассмотрим конкретные примеры применения теоремы Гаусса.

**Пример 1.** Электрическое поле равномерно заряженной по поверхности бесконечно протяженной плоскости. Поле плоского конденсатора.

*1 этап.* Введем поверхностную плотность заряда  $\sigma$ . Для этого на заряженной поверхности вблизи какой-либо ее точки выбирают элементарную площадку  $dS$ , содержащую заряд  $dq$ , и рассчитывают  $\sigma$  по формуле

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \quad (3.15)$$

т. е.  $\sigma$  представляет собой заряд, приходящийся на единицу поверхности. Если плоскость заряжена равномерно, то тогда во всех ее точках  $\sigma$  будет одинаковой ( $\sigma = \text{const}$ ) и поле такой бесконечно протяженной плоскости является однородным — линии  $\vec{E}$  представляют собой прямые, перпендикулярные к ней; во всех точках поля модуль  $\vec{E}$  одинаков (рис. 3.9, а).

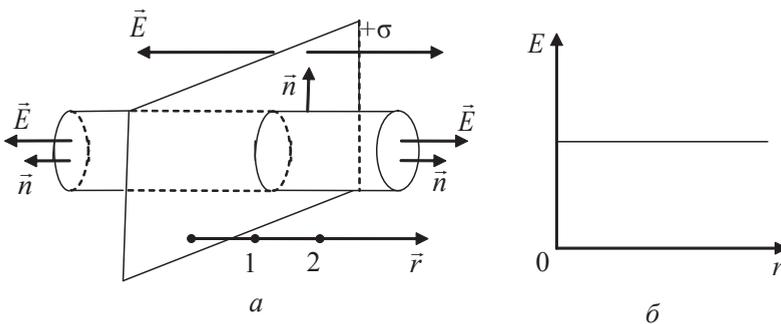


Рис. 3.9

*2 этап.* Выбираем замкнутую поверхность в виде цилиндра, образующая которого перпендикулярна к плоскости (рис. 3.9, а). Тогда поток  $\Phi_E$  через боковую поверхность будет равен нулю ( $\alpha = 90^\circ$ , линии  $\vec{E}$  не пересекают боковой поверхности) и поэтому остается поток только через основания площади  $S_1 = S_2 = S$

$$\Phi_E = \oint_s E dS \cos \alpha = \int_{S_1} E dS \cos \alpha + \int_{S_2} E dS \cos \alpha = 2ES.$$

3 этап. Рассчитаем заряд плоскости, попадающий внутрь цилиндра

$$q_{\Sigma} = \int_s dq = \int_s \sigma dS = \sigma S.$$

4 этап. Применяем теорему Гаусса (формула (3.13) для расчета модуля вектора  $\vec{E}$

$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon\epsilon_0};$$

$$E = \frac{|\sigma|}{2\epsilon\epsilon_0}, \quad (3.16)$$

где введением  $|\sigma|$  учтен случай отрицательно заряженной плоскости.

На рис. 3.9, б приведен график зависимости модуля вектора  $\vec{E}$  для поля плоскости в зависимости от расстояния  $r$  от нее.

Формула (3.16) также позволяет провести расчет поля плоского конденсатора как поля двух параллельных плоскостей с равными по модулю и противоположными по знаку поверхностными плоскостями зарядов (рис. 3.10, а).

Используя принцип суперпозиции электростатических полей, можно сделать вывод о том, что поле конденсатора существует между его пластинами (рис. 3.10, б), а модуль вектора  $\vec{E}$  этого поля равен

$$E = E_+ + E_- = \frac{|\sigma|}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{|q|}{S\epsilon\epsilon_0}, \quad (3.17)$$

где  $|q|$  — модуль заряда одной из пластин конденсатора площади  $S$ .

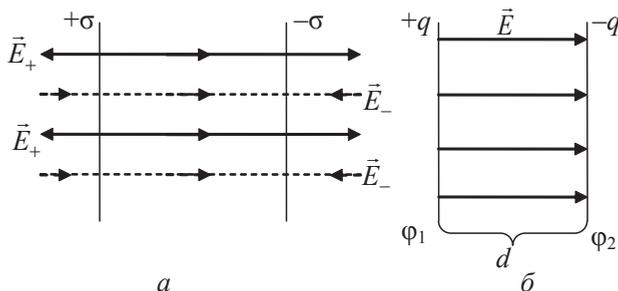


Рис. 3.10

**Пример 2.** Поле равномерно заряженной бесконечно длинной прямолинейной нити.

*1 этап.* Введем линейную плотность  $\tau$  заряда нити. Для этого на заряженной нити выбираем элемент длиной  $dl$ , содержащий заряд  $dq$ , и рассчитываем  $\tau$  по формуле

$$\tau = \frac{dq}{dl}, \quad (3.18)$$

т. е.  $\tau$  представляет собой заряд, приходящийся на единицу длины нити. Для равномерно заряженной нити во всех ее точках  $\tau$  будет одинаковой ( $\tau = \text{const}$ ), поэтому поле такой нити обладает осевой симметрией — линии  $\vec{E}$  представляют собой прямые, выходящие из нити и лежащие в плоскостях, перпендикулярных к ней (см. рис. 3.10, а). Причем на одинаковых расстояниях от нити, т. е. на цилиндрических поверхностях, модуль  $\vec{E}$  будет одинаковым.

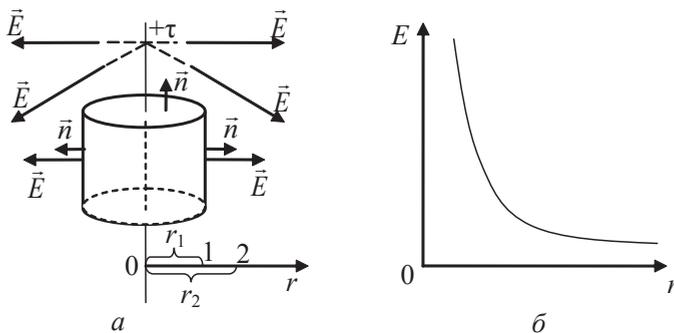


Рис. 3.11

*2 этап.* Выбираем замкнутую поверхность в виде цилиндра, имеющего высоту  $H$  и радиус  $r$ , ось цилиндра совпадает с нитью. Поток  $\Phi_E$  через основания цилиндра равен нулю ( $\alpha = 90^\circ$ ), поэтому остается поток только через его боковую поверхность

$$\Phi_E = \oint_S EdS \cos \alpha = \int_{S_{\text{бок}}} EdS \cos \alpha = ES_{\text{бок}} = E2\pi rH.$$

*3 этап.* Рассчитываем заряд отрезка нити длиной  $H$ , попадающий внутрь цилиндра,

$$q_\Sigma = \int dq = \int \tau \cdot dl = \tau \cdot H.$$

4 этап. Применяем теорему Гаусса для расчета модуля вектора  $\vec{E}$

$$E2\pi rH = \frac{\tau \cdot H}{\epsilon\epsilon_0}, \quad E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (3.19)$$

На рис. 3.11, б приведен график зависимости модуля вектора  $\vec{E}$  для поля нити на расстоянии  $r$  до нее.

**Пример 3.** Поле равномерно заряженной по поверхности сферы (заряженной металлической сферы или шара) радиусом  $R$  и заряда  $q$ .

1 этап. Поле такой сферы обладает сферической симметрией — линии  $\vec{E}$  представляют собой прямые, выходящие из центра положительно заряженной сферы заряда  $q$  (рис. 3.12, а). Причем на одинаковом расстоянии от центра сферы, т. е. на сферических поверхностях, модуль  $\vec{E}$  будет одинаковым.

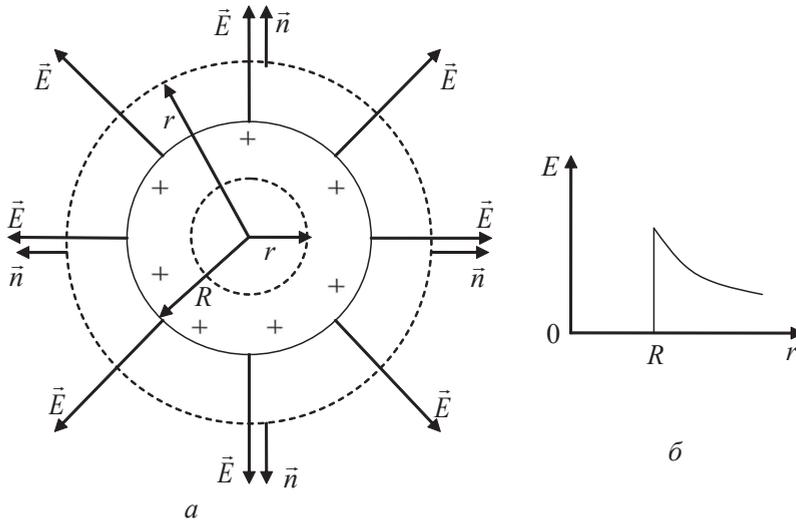


Рис. 3.12

2 этап. Выбираем вспомогательную замкнутую поверхность в виде сферы, имеющей радиус  $r > R$ . Рассчитаем поток  $\Phi_E$  через эту замкнутую поверхность

$$r > R: \quad \Phi_E = \oint_s E dS \cos \alpha = E \oint_s dS = E4\pi r^2.$$

3 этап.  $q_\Sigma = q$ .

4 этап. По теореме Гаусса рассчитаем напряженность поля сферы

$$E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}.$$

Аналогичный расчет для расстояний  $r < R$  приводит к тому, что внутри сферы электрического поля нет, т. к. в этом случае внутри вспомогательной поверхности, имеющей радиус  $r$ , заряд  $q$  сферы не попадает ( $q_\Sigma = 0$ ,  $E = 0$ ).

Из записанных выше формул для вектора  $\vec{E}$  следует, что внутри сферы поле отсутствует, а за ее пределами оно совпадает с полем точечного заряда  $q$ , помещенного в центр сферы:

$$r < R: \quad E = 0, \quad r \geq R: \quad E = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0 r^2}, \quad (3.20)$$

где введена поверхностная плотность заряда  $\sigma = \frac{q}{S} = \frac{q}{4\pi R^2}$ .

### 3.1.7. Потенциальная энергия взаимодействия точечных зарядов. Потенциальный характер электростатического поля

Взаимодействие между неподвижными зарядами осуществляется посредством электростатического поля: *взаимодействуют не заряды, а один заряд в месте своего расположения взаимодействует с полем, созданным другим зарядом*. В этом заключается идея близкодействия — идея передачи взаимодействий через материальную среду, через поле.

Покажем, что электростатическое поле является потенциальным полем. Для этого рассчитаем работу кулоновской силы при перемещении точечного положительного заряда  $q_2$  из точки 1 в точку 2 (см. рис. 3.11, б) в электростатическом поле, созданном положительным точечным зарядом  $q_1$ ,

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_1^2 \vec{F}_k d\vec{s} = \int_1^2 F_k dl \cos \alpha = \int_1^2 F_k dr = \\ &= \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1} - \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2} = W_{p1} - W_{p2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Как видно из формулы (3.21), в окончательное выражение входят величины, описывающие только начальное и конечное положение заряда  $q_2$ , т. е. работа сил поля не зависит от пути перехода из точки 1 в точку 2. Это означает, что кулоновская сила будет консервативной силой, а электрическое поле является потенциальным. В таком поле заряд обладает потенциальной энергией  $W_p$ . Она представляет собой потенциальную энергию точечного заряда  $q_2$  в электрическом поле заряда  $q_1$  или потенциальную энергию заряда  $q_1$  в электрическом поле заряда  $q_2$ , или взаимную потенциальную энергию двух взаимодействующих точечных зарядов.

На основе формулы (3.21) для  $W_p$  можно записать следующее выражение:

$$W_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} + \text{const}. \quad (3.22)$$

Из выражения (3.22) видно, что  $W_p$  определяется с точностью до постоянной величины. Ее выбор осуществляется наиболее удобным для решения задач способом. В данном случае для электрического поля точечного заряда принято выбирать const так, чтобы на бесконечно большом расстоянии между зарядами их взаимная потенциальная энергия обращалась в ноль, т. е. при  $r \rightarrow \infty$   $W_p = 0$ . Следовательно,

$$W_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (3.23)$$

### 3.1.8. Потенциал $\phi$ электростатического поля.

#### Расчет $\phi$ для электростатического поля точечного заряда

Из сказанного выше (см. п. 3.1.7) следует, что точечный заряд  $q$ , помещенный в электростатическое поле, обладает в этом поле потенциальной энергией  $W_p$ . Для расчета потенциальной энергии взаимодействия заряда с полем вводят потенциал  $\phi$ .

$\phi$  — скалярная физическая величина, являющаяся энергетической характеристикой поля и равная отношению потенциальной энергии пробного заряда  $q_0$ , помещенного в данную точку поля, к величине этого заряда.

$$\varphi = \frac{W_p}{q_0} \quad (3.24)$$

Для произвольного электрического поля  $\varphi$  можно определить экспериментально. Для этого нужно в каждую точку поля помещать пробный положительный заряд  $q_0$ , найти из опыта  $W_p$ , а затем рассчитать потенциал  $\varphi$  по формуле (3.24).

Зная величину потенциала в каждой точке поля, можно оценить  $W_p$  по формуле:

$$W_p = q\varphi. \quad (3.25)$$

Выведем формулу для потенциала электростатического поля, созданного *точечным зарядом*. Будем считать, что точечный заряд  $q$  создает электрическое поле, а точечный заряд  $q_0$  находится в этом поле. Тогда из формул (3.23), (3.24) следует:

$$W_p = q_0\varphi = \frac{q_0q}{4\pi\epsilon\epsilon_0r} \Rightarrow$$

$$\varphi_{т.з} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0r}. \quad (3.26)$$

Формула (3.26) определяет потенциал  $\varphi$  поля точечного заряда.

Согласно формулам (3.22) и (3.23) нулевой уровень потенциала  $\varphi$  электростатического поля точечного заряда выбирается на бесконечно большом расстоянии от него ( $r \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow 0$ ).

На рис. 3.13 приведен график зависимости потенциала  $\varphi$  от расстояния  $r$  до точечного заряда — источника поля.

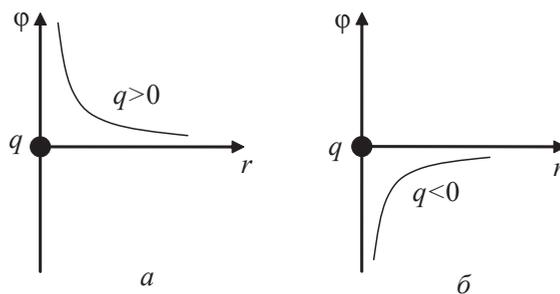


Рис. 3.13

Так как потенциал  $\varphi$  является алгебраической величиной, то он может иметь разные знаки, в зависимости от знака заряда — источника электрического поля (см. рис. 3.13, *a*, *b*). Чем меньше расстояние до положительного заряда, создающего поле, тем больше  $\varphi$  (образно говоря, происходит подъем на потенциальную горку) и, соответственно, чем ближе к отрицательному заряду, тем меньше  $\varphi$  (происходит спуск в потенциальную яму).

### 3.1.9. Принцип суперпозиции для потенциала. Расчет потенциала для электрического поля диполя и на оси равномерно заряженного кольца

Для потенциала  $\varphi$  поля, созданного системой зарядов или макроскопическим заряженным телом, также справедлив *принцип суперпозиции: потенциал  $\varphi$  электрического поля, созданного несколькими зарядами, равен алгебраической сумме потенциалов полей, созданных каждым зарядом по отдельности,*

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots \quad (3.27)$$

В случае макроскопического заряженного тела для оценки  $\varphi$  в какой-либо т. *A* (см. рис. 3.3, *a*) разбивают тело на малые объемы (их можно рассматривать как точечные заряды  $dq$ ). Затем по формуле (3.26) находят потенциалы  $d\varphi$  от этих зарядов в т. *A* и проводят суммирование всех  $d\varphi$ , т. е. берут интеграл по объему  $V$  тела

$$\varphi_A = \int_V d\varphi, \quad \text{где} \quad d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (3.28)$$

Принцип суперпозиции позволяет также рассчитывать потенциальную энергию взаимодействия зарядов. Так, для системы точечных зарядов  $q_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) можно записать

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i, \quad (3.29)$$

где  $\varphi_i$  — потенциал поля, созданного всеми зарядами, кроме  $i$ -го заряда, в месте расположения  $i$ -го заряда; коэффициент (1/2) входит в формулу из-за того, что взаимодействие двух зарядов в сумме учитывается дважды.

Приведем примеры использования формулы (3.28).

**Пример 1.** Потенциал электрического поля, создаваемого диполем в т.  $A$ .

Рассчитаем потенциал  $\varphi$  в т.  $A$ , отстоящей от центра диполя (т.  $O$ ) на расстоянии  $r$  ( $r = OA$ , рис. 3.4, б). Для этого воспользуемся формулами для потенциала точечного заряда (3.26), дипольного момента (3.10) и принципа суперпозиции (3.27)

$$\varphi_A = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{|q|}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{1}{r-l/2} - \frac{1}{r+l/2} \right) = [r \gg l] = \frac{p}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}, \quad (3.30)$$

**Пример 2.** Потенциал электростатического поля на оси равномерно заряженного кольца.

Из формул (3.26) и (3.30) следует, что потенциал  $\varphi$  поля диполя на расстояниях  $r \gg l$  определяется модулем его дипольного момента  $\vec{p}$  и уменьшается в зависимости от расстояния  $r$  быстрее, чем для поля точечного заряда кольца. Найдем потенциал  $\varphi$  поля кольца в т.  $A$ , расположенной на оси кольца на расстоянии  $l$  от его центра (см. рис. 3.3, б).

Для этого разбиваем кольцо на малые участки — точечные заряды  $dq$  и используем для расчета  $\varphi_A$  формулу (3.27).

$$\varphi_A = \int d\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 \sqrt{R^2 + l^2}}. \quad (3.31)$$

Из формулы (3.31), в частности, следует, что в центре кольца, в точке  $O$ , ( $l = 0$ )

$$\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}.$$

На расстояниях  $l$ , значительно превышающих радиус  $R$  кольца ( $l \gg R$ ), его можно рассматривать как материальную точку, а электрическое поле кольца как поле точечного заряда. Действительно, если

$$l \gg R, \text{ то } \varphi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 l}.$$

**3.1.10. Работа сил электрического поля. Разность потенциалов.****Формула связи вектора  $\vec{E}$  и потенциала  $\varphi$** 

Запишем формулы для работы сил электростатического поля по перемещению точного заряда из точки 1 в точку 2. Учитывая выражения (3.6), (3.21), получим:

$$A_{12} = q \int_1^2 E dl \cos \alpha, \quad \alpha = (\vec{E}, d\vec{S}); \quad (3.32)$$

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (3.33)$$

где  $d\vec{S}$  – вектор элементарного перемещения.

Величину  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  называют *разностью потенциалов*. Она характеризует работу сил электростатического поля по перемещению заряда из одной точки поля в другую и равна отношению этой работы к величине переносимого заряда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q}.$$

Отметим, что непосредственно из опыта можно найти разность потенциалов, а сам потенциал, подобно потенциальной энергии, определяется с точностью до произвольной постоянной величины.

Из выражений (3.32), (3.33) можно получить интегральную формулу связи  $\vec{E}$  и  $\varphi$ , в которую входят две точки поля:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dl \cos \alpha. \quad (3.34)$$

Дифференциальную формулу связи  $\vec{E}$  и  $\varphi$ , справедливую для малой окрестности какой-либо точки поля, можно вывести из выражений для элементарной работы:

$$dA = qE dl \cos \alpha = qE_l dl = -q d\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_l = -\frac{d\varphi}{dl}, \quad (3.35)$$

где  $E_l$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на направление  $\vec{l}$  в пространстве.

В наиболее общем векторном виде выражение, связывающее  $\vec{E}$  и  $\varphi$ , записывается из полученного в механике соотношения между консервативной силой и потенциальной энергией.

$$\vec{F}_k = q\vec{E} = -\text{grad} W_p = -\text{grad}(q\vec{E});$$

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi. \quad (3.36)$$

Итак, в каждой точке поля вектор  $\vec{E}$  равен по модулю и противоположен по направлению вектору градиента потенциала, т. е. вектор  $\vec{E}$  в каждой точке указывает направление наиболее быстрого убывания потенциала (см. рис. 3.4, а).

Следует отметить, что при описании электростатического поля можно было бы ограничиться введением только одной характеристики поля — вектора  $\vec{E}$ . Действительно, через вектор  $\vec{E}$  можно определить потенциальную энергию заряда, работу по его перемещению, не вводя понятие потенциала. Но понятие потенциала является удобным с точки зрения практического применения электростатических полей.

### 3.1.11. Примеры вычисления разности потенциалов

Применим формулу (3.34) к расчету разности потенциалов между двумя точками в случае различных полей:

1) поле создано *бесконечно протяженной заряженной плоскостью*. Используя формулы (3.34) и (3.16), находим разность потенциалов между двумя точками поля, находящимися на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от плоскости (см. рис. 3.8, а).

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dl \cos \alpha = \pm E(r_2 - r_1) = \pm \frac{|\sigma|}{2\epsilon\epsilon_0}(r_2 - r_1), \quad (3.37)$$

где знак «−» берется для отрицательно заряженной плоскости, знак «+» выбирается для положительно заряженной плоскости;

2) поле создано *конденсатором*. С учетом формул (3.34) и (3.17) разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  (или напряжение  $U$ ) между обкладками конденсатора, находящимися на расстоянии  $d$  друг от друга, равна

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dl \cos \alpha = Ed = \frac{|\sigma|}{\varepsilon \varepsilon_0} d = \frac{q}{S \varepsilon \varepsilon_0} d ; \quad (3.38)$$

3) поле создано *равномерно заряженной бесконечно длинной прямолинейной нитью*. Используя формулы (3.34) и (3.18), находим разность потенциалов между двумя точками, находящимися на расстоянии  $r_1$  и  $r_2$  от нити (см. рис. 3.11, а)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dl \cos \alpha = [dl = dr, \alpha = 0] = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon \varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon \varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} ; \quad (3.39)$$

4) поле создано равномерно заряженной по поверхности *сферой* радиусом  $R$  и зарядом  $q$  (см. рис. 3.12, а). Из формул (3.20) и (3.34) получаем, что  
при  $r < R$ :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dl \cos \alpha = 0, \text{ т.к. } E = 0 \Rightarrow \varphi = \text{const} ; \quad (3.40)$$

при  $r \geq R$ :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dl \cos \alpha = [dl = dr, \alpha = 0] = \frac{q}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 r_2} . \quad (3.41)$$

Из формул (3.40) и (3.41) следует, что внутри сферы потенциал постоянен, а за ее пределами он совпадает с потенциалом точечного заряда  $q$ , помещенного в центр сферы (см. формулу (3.26)). На поверхности сферы потенциал вычисляется по формуле

$$\varphi_{\text{сф}} = \frac{q}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 R} . \quad (3.42)$$

На рис. 3.14 приведен график зависимости потенциала  $\varphi$  от расстояния  $r$  от центра сферы (в случае, если  $\varepsilon = 1$ ).

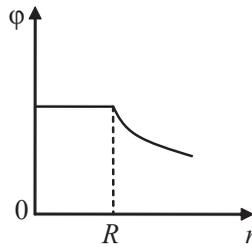


Рис. 3.14

### 3.1.12. Эквипотенциальные поверхности

Графически электростатические поля можно также изображать с помощью эквипотенциальных поверхностей. Эквипотенциальная поверхность — это поверхность равного потенциала (в каждой точке поверхности потенциал  $\phi$  будет одинаковым). Поэтому элементарная работа по перемещению заряда  $q$  по такой поверхности будет равна нулю:  $dA = -qd\phi = 0$ . Из этого следует, что вектор  $\vec{E}$  в каждой точке поверхности будет перпендикулярен к ней, т. е. будет направлен по вектору нормали  $\vec{n}$  (см. рис. 3.5, *e*). Действительно, если бы это было не так, то тогда существовала бы составляющая вектора  $\vec{E}$  ( $E_\tau$ ), направленная по касательной к поверхности, и, следовательно, потенциал в разных точках поверхности был бы разным ( $E_\tau = -\frac{d\phi}{d\tau} \neq 0 \Rightarrow \phi \neq \text{const}$ ), что противоречит определению эквипотенциальной поверхности.

На рис. 3.5 приведено графическое изображение электрических полей с помощью эквипотенциальных поверхностей (пунктирные линии) для точечного заряда (см. рис. 3.5, *б, в*, это сферы, в центре которых находится точечный заряд), для поля, созданного одновременно отрицательным и положительным зарядами (см. рис. 3.5, *г*), для однородного электрического поля (см. рис. 3.5, *д*, это плоскости, перпендикулярные к линиям  $\vec{E}$ ).

Условились проводить эквипотенциальные поверхности так, чтобы разность потенциалов между соседними поверхностями была одинаковой. Это позволяет наглядно видеть изменение потенциальной энергии заряда при его движении в электрическом поле.

Тот факт, что вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен к эквипотенциальной поверхности в каждой ее точке, позволяет достаточно просто переходить от графического изображения электрического поля с помощью линий  $\vec{E}$  к эквипотенциальным поверхностям, и наоборот. Так, проведя на рис. 3.5, б, в, г, д пунктирные линии, перпендикулярные к линиям  $\vec{E}$ , можно получить графическое изображение поля с помощью эквипотенциальных поверхностей в плоскости рисунка.

### 3.1.13. Циркуляция вектора $\vec{E}$ электростатического поля.

#### Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$ электростатического поля

Возьмем произвольный контур ( $\Gamma$ ) в неоднородном электростатическом поле (см. рис. 3.6, б). Тогда *циркуляцией вектора  $\vec{E}$*  по произвольному контуру ( $\Gamma$ ) называют интеграл вида:

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{E} d\vec{l} = \oint_{(\Gamma)} E dl \cos \alpha, \quad \alpha = (\vec{E}, d\vec{l}). \quad (3.43)$$

Входящий в эту формулу вектор  $d\vec{l}$  определяется следующим образом. По модулю он равен элементарной длине  $dl$  контура ( $\Gamma$ ). Направление вектора  $d\vec{l}$  совпадает с направлением обхода контура ( $\Gamma$ ) (см. рис. 3.6, б).

В случае электростатического поля циркуляция вектора  $\vec{E}$  по произвольному замкнутому контуру ( $\Gamma$ ) равна отношению работы  $A_{\text{круг}}$  сил поля по перемещению точечного заряда  $q$  по этому контуру к величине заряда и в соответствии с формулами (3.32), (3.33) будет равна нулю

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{E} d\vec{l} = \frac{A_{\text{круг}}}{q} = \varphi_{\text{нач}} - \varphi_{\text{кон}} = 0. \quad (3.44)$$

Так как циркуляция вектора  $\vec{E}$  по произвольному замкнутому контуру ( $\Gamma$ ) равна нулю, то электростатическое поле является *потенциальным*. Следовательно, электрические заряды в электростатическом поле обладают потенциальной энергией.

### 3.1.14. Распределение избыточного заряда на проводниках в состоянии равновесия

К проводникам относятся вещества, проводящие электрический ток. В них имеются свободные заряды, которые способны перемещаться по проводнику под действием внешнего электрического поля. В металлических проводниках свободными зарядами являются электроны, они образуют газ, заполняющий кристаллическую решетку положительно заряженных ионов.

Рассмотрим, что произойдет, если проводнику сообщить избыточный заряд. При этом положительному заряду металлического проводника соответствует недостаток свободных электронов, а отрицательному заряду — их избыток.

В условиях равновесия избыточного заряда справедливы следующие утверждения:

1. Электрическое поле внутри проводника отсутствует, а объем проводника и его поверхность являются эквипотенциальными:

$$E_{\text{вн}} = 0, \quad \varphi_{\text{вн}} = \text{const} . \quad (3.45)$$

Действительно, если равенства (3.45) не выполняются, то тогда свободные заряды в проводнике будут перемещаться, так как работа сил электрического поля не будет равна нулю ( $dA = qEdl \cos \alpha = -qd\varphi \neq 0$ ). Это противоречит условию равновесия избыточного заряда: в условиях равновесия они должны быть неподвижными.

2. Избыточный заряд распределяется только по внешней поверхности проводника, так как из-за кулоновского отталкивания одноименных зарядов они стараются разойтись друг от друга на максимально возможные расстояния.

Это утверждение можно доказать, используя теорему Гаусса. Выберем внутри проводника произвольную замкнутую поверхность (см. рис. 3.15, *a*) и рассчитаем через нее поток вектора  $\vec{E}$  в условиях равновесия. Учтем, что связанных зарядов в металле не возникает ( $q' = 0$ ), поэтому из формулы (3.14) следует:

$$\oint_S E_{\text{вн}} dS \cos \alpha = [E_{\text{вн}} = 0] = \frac{q_{\Sigma}}{\epsilon_0} \Rightarrow q_{\Sigma} = 0 ,$$

т. е. внутри такой поверхности избыточного заряда нет, так как этот заряд одного знака. Следовательно, он располагается только на внешней поверхности проводника.

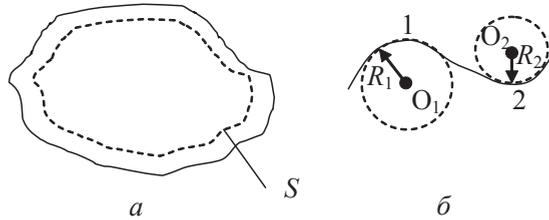


Рис. 3.15

3. Распределение избыточного заряда по внешней поверхности проводника является неравномерным: модуль вектора  $\vec{E}$  и поверхностная плотность заряда  $\sigma$  больше в тех точках поверхности проводника, где ее кривизна больше.

Кривизну поверхности в какой-либо ее точке можно определить радиусом  $R$  вписанной вблизи этой точки сферы, а именно кривизна поверхности обратно пропорциональна  $R$ .

Докажем третье утверждение. Если учесть, что поверхность проводника можно представить в виде совокупности разных участков вписанных в нее сфер (рис. 3.15, б) и использовать формулы (3.20) и (3.42) для напряженности  $E$  и потенциала  $\varphi$  на поверхности сферы, то тогда можно записать:

$$\varphi_{\text{поверх}} = \varphi_{\text{сф1}} = \varphi_{\text{сф2}} : \quad \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{\sigma_2 R_2}{\epsilon \epsilon_0} \Rightarrow \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1},$$

$$E_{\text{поверх}} = E_{\text{сф}} = \frac{\varphi_{\text{сф}}}{R} = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0}. \quad (3.46)$$

Согласно формуле (3.46) модуль вектора  $\vec{E}$  вблизи какой-либо точки поверхности заряженного проводника пропорционален поверхностной плотности заряда  $\sigma$  в этой точке.

На рис. 3.16, а приведено графическое изображение с помощью линий  $\vec{E}$  электрического поля заряженного проводника сложной формы. Нужно учесть, что линии  $\vec{E}$  во всех точках перпендикулярны к поверхности металла, так как она является эквипотенциальной поверхностью.

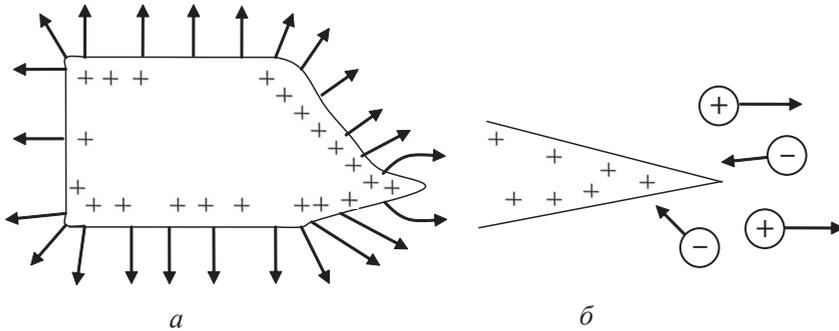


Рис. 3.16

Вблизи острия модуль вектора  $\vec{E}$  может превысить значение, соответствующее ионизации молекул воздуха (при атмосферном давлении  $E_{\text{иониз}} \approx 3 \cdot 10^6 \text{ В/м}$ ), что приводит к возникновению явления *стекания зарядов*, сопровождающегося *электрическим ветром*.

Образующиеся при ионизации молекул электроны движутся к острию и компенсируют на нем часть заряда, равновесие зарядов на проводнике нарушается, и к острию подходят заряды с других участков поверхности проводника (рис. 3.16, б). Это движение продолжается до тех пор, пока модуль напряженности электрического поля вблизи острия будет превышать  $E_{\text{иониз}}$ .

В то же время положительно заряженные ионы молекул воздуха движутся в противоположном направлении от острия, при этом они увлекают за собой нейтральные молекулы, создавая движение воздуха — электрический ветер.

### 3.1.15. Незаряженный проводник во внешнем электрическом поле

Поместим во внешнее электрическое поле напряженности  $\vec{E}_0$  незаряженный проводник (см. рис. 3.17, а, начальный момент времени  $t = 0$ ).

Под действием сил поля свободные заряды в проводнике приходят в движение и на его противоположных сторонах появляются индуцированные заряды (такое явление получило название явления электростатической индукции). Индуцированные заряды в условиях равновесия создают свое поле  $\vec{E}'$ , которое компенсирует внешнее электрическое

поле внутри проводника ( $\vec{E}_{\text{внутри}} = \vec{E}' + \vec{E}_0 = 0$ ,  $\varphi_{\text{внутри}} = \text{const}$ ), и искажают внешнее поле снаружи, вблизи поверхности (рис. 3.17, б).

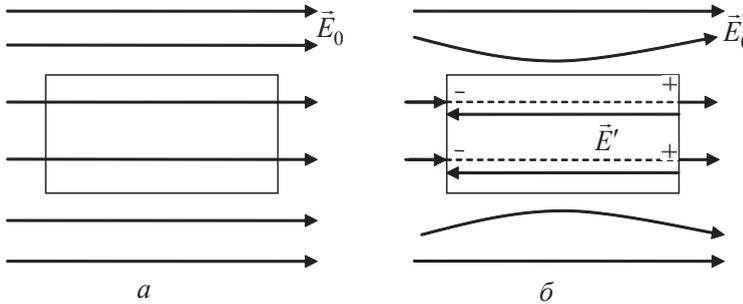


Рис. 3.17

Итак, внешнее электрическое поле не проникает внутрь металла. Это позволяет использовать металлическую оболочку, сплошную или в виде сетки, для защиты (экранировки) различных приборов от внешних электрических полей.

### 3.1.16. Электроемкость уединенного проводника. Электроемкость конденсатора

Уединенный проводник — это проводник, расположенный вдали от других заряженных тел или проводников так, что они не оказывают на этот проводник никакого влияния. Из экспериментальных данных следует, что заряд  $q$  проводника и его потенциал  $\varphi$  (он в условиях равновесия будет одинаковым внутри и на поверхности проводника) будут пропорциональны друг другу  $q \sim \varphi$ . Поэтому коэффициент пропорциональности между ними

$$C = \frac{q}{\varphi} \quad (3.47)$$

не будет зависеть ни от  $q$  и ни от  $\varphi$ . Этот коэффициент  $C$  называется *электроемкостью проводника*. Электроемкость проводника характеризует его способность накапливать заряд и зависит только от геометрических размеров проводника и диэлектрических свойств окружа-

ющей среды, т. е. от  $\epsilon$ . Действительно, в случае металлической сферы с учетом формулы (3.42) можно записать

$$C_{\text{сф}} = \frac{q}{\varphi_{\text{сф}}} = \frac{q}{q / 4\pi\epsilon\epsilon_0 R} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R. \quad (3.48)$$

Емкость уединенного проводника является достаточно малой величиной. Так, если рассматривать планету Земля как проводящий шар радиусом  $R = 6400$  км, то тогда ее емкость составит всего 711 мкФ.

Оказывается, что наличие вблизи уединенного проводника каких-либо тел увеличивает его емкость.

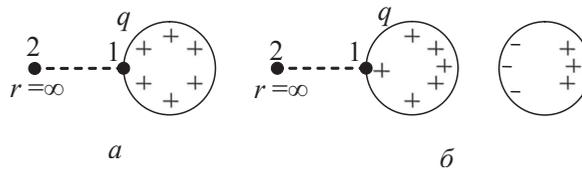


Рис. 3.18

Действительно, если, например, к положительно заряженному проводнику (рис. 3.18, а) поднести незаряженный металлический проводник, то за счет перераспределения заряда на проводниках (рис. 3.18, б) электрическое поле в пространстве ослабевает, т. е. на линии 1–2 модуль вектора  $\vec{E}$  будет уменьшаться, поэтому потенциал поверхности заряженного проводника

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1 = \int_1^2 E dl \cos \alpha$$

будет также уменьшаться, что при постоянном заряде проводника приводит к увеличению его емкости:  $q = \text{const}, \varphi \downarrow \Rightarrow \uparrow C = q/\varphi$ .

Оказывается, что наибольший эффект увеличения емкости достигается для конденсаторов, представляющих собой две металлические пластины, разделенные слоем диэлектрика. На пластины (обкладки) подают заряды, одинаковые по модулю и противоположные по знаку. Форма обкладок конденсатора обеспечивает существование электрического поля только в пространстве между ними. Это позволяет устранить влияние на емкость конденсатора окружающих

его тел. На рис. 3.19 приведено схематическое изображение плоского, сферического и цилиндрического конденсаторов.

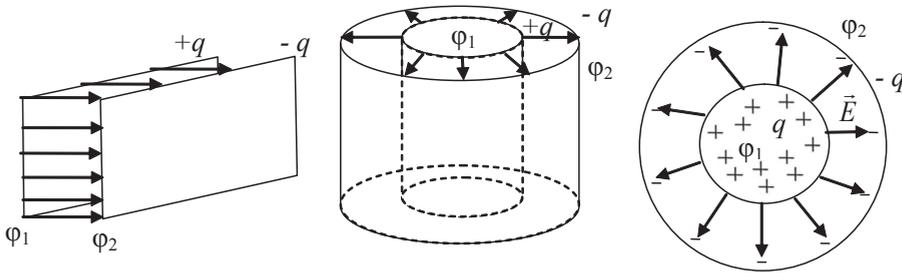


Рис. 3.19

Емкость конденсатора вводится согласно формуле

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}, \quad (3.49)$$

где  $q$  — заряд положительно заряженной пластины конденсатора,  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  — разность потенциалов между его обкладками.

Емкость конденсатора, как и емкость уединенного проводника, зависит только от его геометрических размеров и диэлектрических свойств среды ( $\epsilon$ ) между его пластинами.

Запишем формулу для емкости плоского конденсатора. Используя полученную в п. 3.1.11 формулу (3.38) для разности потенциалов на обкладках плоского конденсатора, получим

$$C_{\text{пл}} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{qd / (\epsilon\epsilon_0 S)} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}, \quad (3.50)$$

где  $S$  — площадь одной пластины конденсатора;  $d$  — расстояние между ними;  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды между обкладками конденсатора.

Найдем емкость сферического конденсатора, радиус внутренней обкладки которого равен  $r_1$ , внешней —  $r_2$ , а пространство между обкладками заполнено однородным диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$ . Электрическое поле в сферическом конденсаторе создается только его внутренней обкладкой (согласно теореме Гаусса). Для определения емкости воспользуемся формулами (3.41) и (3.49):

$$C_{\text{сф}} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_2}} = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Определим емкость цилиндрического конденсатора, радиус внутренней обкладки которого равен  $r_1$ , внешней —  $r_2$ , а пространство между обкладками заполнено однородным диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$ . По теореме Гаусса электрическое поле в цилиндрическом конденсаторе создается только его внутренней обкладкой и совпадает с полем, созданным заряженной нитью (см. формулу (3.19)). Для определения электроемкости воспользуемся формулой разности потенциалов для поля нити (3.39) и определением емкости:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{\frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l} \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

### 3.1.17. Энергия заряженного проводника и конденсатора.

#### Энергия электростатического поля. Объемная плотность энергии электростатического поля

Выведем формулу для энергии  $W$  заряженного проводника. Для этого рассмотрим работу внешних сил по увеличению заряда проводника от  $q_1 = 0$  (энергия проводника  $W_1 = 0$ , если потенциал  $\varphi_1 = 0$ ) до  $q_2$  (энергия  $W_2$ , потенциал  $\varphi_2$ ), а именно будем малыми порциями  $dq$  перемещать заряд из бесконечности ( $\varphi_\infty = 0$ ) на поверхность проводника (см. рис. 3.17, а). При этом работа  $A_{\text{вн}}$  внешней силы будет совершаться против кулоновской силы отталкивания одноименных зарядов и поэтому

$$A_{\text{вн}} = W_2 - W_1 = -A_{\text{кул}} = -\int_0^{q_2} dA_{\text{кул}} = -\int_0^{q_2} (\varphi_\infty - \varphi) dq = \int_0^{q_2} \frac{q}{C} dq = \frac{q_2^2}{2C},$$

где учтено, что  $W_1 = 0$ .

Итак, для энергии заряженного уединенного проводника можно записать

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2}. \quad (3.51)$$

Аналогично можно получить формулу для энергии  $W$  заряженного конденсатора. Запишем работу внешних сил по перемещению малых порций заряда  $dq$  с одной пластины конденсатора на другую из состояния 1 (конденсатор не заряжен, заряд пластин  $q_1 = 0$ , энергия конденсатора  $W_1 = 0$ ) до состояния 2 (энергия  $W_2$ , заряд положительной обкладки  $q_2 = q$ ).

$$A_{\text{вн}} = W_2 - W_1 = -A_{\text{кул}} = -\int_0^q dA_{\text{кул}} = -\int_0^q (\varphi_1 - \varphi_2) dq = -\int_0^q \left(-\frac{q}{C}\right) dq = \frac{q^2}{2C},$$

где учтено, что  $W_1 = 0$  и  $(\varphi_1 - \varphi_2) < 0$ , так как заряд перемещается от отрицательно заряженной обкладки, где находится точка 1, к положительно заряженной обкладке, на которой находится точка 2.

В итоге энергия заряженного конденсатора запишется следующим образом:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2}. \quad (3.52)$$

Оставаясь в рамках электростатики, нельзя однозначно ответить на вопрос о происхождении энергии заряженного проводника (конденсатора) — или это энергия его зарядов, или энергия электростатического поля в окружающем проводник пространстве. И только из рассмотрения полной системы уравнения Максвелла был сделан вывод в пользу электростатического поля. Поэтому запишем формулы (3.51), (3.52) через характеристику электростатического поля — вектор напряженности  $\vec{E}$ . Для энергии заряженного плоского конденсатора получим

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{2d} (Ed)^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V = wV,$$

где  $V = Sd$  — объем пространства между обкладками конденсатора, т. е. объем, занимаемый электростатическим полем, а величина  $w$  называется *объемной плотностью энергии электростатического поля*.

В общем случае для неоднородного поля величина  $w$  определяется так:

$$w(x, y, z) = \frac{dW}{dV} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2(x, y, z)}{2}, \quad (3.53)$$

где  $dW$  — энергия электростатического поля, заключенная в элементарном объеме  $dV$  вблизи точки пространства с координатами  $(x, y, z)$ .

Введение  $w$  позволяет рассчитывать энергию  $W$  поля в любом конечном объеме  $V$  пространства

$$W = \int_V w dV = \iiint_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2(x, y, z)}{2} dx dy dz. \quad (3.54)$$

Так, например, применение формулы (3.54) к сферически симметричному электростатическому полю заряженной металлической сферы радиусом  $R$  приводит к формуле, совпадающей с выражением (3.51),

$$W = \int_R^\infty \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \left( \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} \right)^2 dV = \int dV = 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R} = \frac{q\varphi}{2}.$$

## 3.2. Постоянный электрический ток

### 3.2.1. Сила тока, плотность тока

Под *электрическим током* понимают упорядоченное движение заряженных частиц, причем за направление тока принимают направленные движения положительных зарядов.

Электрический ток существует при наличии свободных зарядов и электрического поля. Такие условия можно создать в вакууме и в различных средах, таких как твердые тела (металлы, полупроводники), жидкости (жидкие металлы, электролиты), и в газах. Обычно рассматривают протекание тока в металлических проводниках, где свободными носителями заряда являются электроны.

Протекание тока по проводнику характеризует сила тока  $I$ , определяемая по формуле

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (3.55)$$

где  $dq$  — заряд, проходящий через поперечное сечение проводника за время  $dt$ .

Сила тока является алгебраической величиной, она может быть как больше, так и меньше нуля. Это, например, проявляется при расчетах сложных электрических цепей, где трудно указать правильное направление тока в каждой части цепи (см. п. 3.2.4).

Для постоянного тока величина  $I$  остается одинаковой и по модулю и по направлению, что позволяет в формуле (3.55) выбирать конечные значения заряда и времени

$$I = \frac{q}{t}. \quad (3.56)$$

Распределение тока по сечению проводника характеризует вектор плотности тока  $\vec{j}$ , направление которого в каждой точке проводника совпадает с направлением тока, т. е. с направлением скорости  $\vec{v}$  упорядоченных положительных зарядов ( $\vec{j} \uparrow \vec{v}$ ). Модуль вектора  $\vec{j}$  равен

$$j = \frac{|dI|}{dS_{\perp}}, \quad (3.57)$$

где  $dI$  — сила тока, протекающего в данной точке внутри проводника через элементарную площадку  $dS_{\perp}$ , расположенную перпендикулярно к направлению тока (рис. 3.20, а).

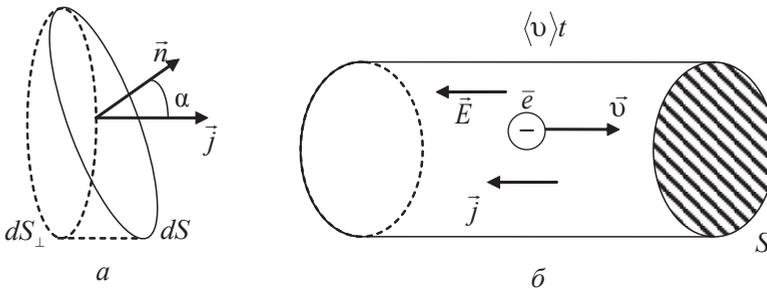


Рис. 3.20

Введение вектора плотности тока  $\vec{j}$  позволяет найти силу тока, протекающего через любую поверхность  $S$

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S} = \int_S j dS \cos \alpha. \quad (3.58)$$

В этой формуле угол  $\alpha$  это угол между вектором  $\vec{j}$  и вектором нормали  $\vec{n}$  к элементарной площадке,  $dS_{\perp} = dS \cos \alpha$  (рис. 3.20, а).

Представляет интерес выразить вектор плотности тока  $\vec{j}$  через характеристики, описывающие движение свободных зарядов в проводнике. В качестве примера рассмотрим электрический ток в металле, где валентные электроны образуют газ свободных частиц, заполняющих кристаллическую решетку положительно заряженных ионов.

В отсутствие электрического поля электроны участвуют в тепловом движении со средней арифметической скоростью  $\langle \vec{u} \rangle$ , составляющей при комнатной температуре величину порядка 100 км/с.

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_{\text{эл}}}} \approx 10^5 \text{ м/с}.$$

Из-за хаотичности теплового движения электронов электрический ток не возникает ( $\vec{j} = 0$ ), так как через поперечное сечение проводника в обе стороны проходит одинаковое число электронов и поэтому суммарный перенос заряда равен нулю.

При включении электрического поля у электронов появляется добавочная скорость  $\langle \vec{v} \rangle$  — скорость направленного движения под действием сил электрического поля; она по модулю примерно равна  $\sim 1$  мм/с, что существенно меньше модуля скорости  $\langle \vec{u} \rangle$ . Но именно скорость  $\langle \vec{v} \rangle$  обеспечивает наличие тока в проводнике. Образно говоря, при включении электрического тока в металле появляется электрический ветер, смещающий все хаотически движущиеся электроны в одном направлении.

Через поперечное сечение проводника площадью  $S$  за время  $t$  пройдут все электроны, находящиеся в цилиндре высотой  $(\langle v \rangle t)$  (см. рис. 3.20, б). Если ввести характеристику металла — концентрацию  $n$  свободных электронов, то тогда можно получить

$$j = \frac{|I|}{S} = \frac{|q|}{St} = \frac{|q_0|N}{St} = \frac{|q_0|nS\langle v \rangle t}{St} = |q_0|n\langle v \rangle,$$

$$\vec{j} = |q_0|n\langle \vec{v} \rangle, \quad (3.59)$$

где  $q_0$  — это заряд электрона или (в общем случае) свободной заряженной частицы, участвующей в создании электрического тока;  $\langle \vec{v} \rangle$  — средняя скорость направленного движения заряженной частицы.

В заключение этого параграфа приведем оценку модуля средней скорости  $\langle \vec{v} \rangle$  направленного движения свободных электронов в металле. Учитывая числовые значения концентрации свободных электронов в металле  $n \sim 10^{29} \text{ м}^{-3}$  и предельно допустимую плотность тока в медном проводнике  $j_{\text{пред}} \sim 10^7 \text{ А/м}^2$ , из формулы (3.55) получим

$$\langle v \rangle = \frac{j}{|q_0|n} \sim \frac{10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{29}} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}.$$

### 3.2.2. Закон Ома для однородного участка цепи в дифференциальной форме

*Однородным участком* электрической цепи называют участок, на котором направленное движение зарядов происходит под действием только кулоновских сил.

Рассмотрим проводник, на концах которого создана разность потенциалов. Носителями тока в проводнике являются свободные электроны, которые в процессе своего движения сталкиваются с ионами кристаллической решетки. На свободные электроны действует созданное в проводнике электрическое поле  $\vec{E}$ . Ускорение, приобретаемое электроном под действием электрического поля,

$$a = \frac{F_{\text{кул}}}{m_{\text{эл}}} = \frac{|q_0|E}{m_{\text{эл}}}. \quad (3.60)$$

С этим ускорением электрон движется между двумя последовательными столкновениями с ионами кристаллической решетки. Время между двумя последовательными соударениями электрона называется *временем свободного пробега*, а расстояние, пройденное при этом, — *длиной свободного пробега*.

При соударениях с ионами решетки электрон полностью отдает им свою энергию (теория Друде — Лоренца), поэтому в результате столкновения скорость упорядоченного движения электрона становится равной нулю ( $v_0 = 0$ ). За время свободного пробега под действием сил электрического поля электрон приобретает максимальную скорость

$$v_{\text{max}} = v_0 + a\langle t \rangle = \frac{|q_0|E}{m_{\text{эл}}}\langle t \rangle,$$

где  $\langle t \rangle$  — среднее время свободного пробега электрона.

При этом средняя скорость направленного движения электронов за время свободного пробега равна

$$\langle v \rangle = \frac{v_0 + v_{\text{max}}}{2} = \frac{v_{\text{max}}}{2} = \frac{|q_0|E}{2m_{\text{эл}}}\langle t \rangle. \quad (3.61)$$

Поскольку при наличии поля в проводнике электроны участвуют в двух видах движения (тепловом, со средней скоростью  $\langle u \rangle$ ), и упоря-

доченном, под действием поля, со скоростью  $\langle v \rangle$ , то результирующая скорость движения электронов равна сумме скоростей этих движений. С учетом этого для средней длины свободного пробега можно записать

$$\langle \lambda \rangle = (\langle v \rangle + \langle u \rangle) \cdot \langle t \rangle = \langle u \rangle \cdot \langle t \rangle, \quad (3.62)$$

где в равенстве (3.62) учтено, что  $\langle v \rangle \ll \langle u \rangle$  (см. п. 3.3.1).

Выражая  $\langle t \rangle$  из формулы (3.62) и подставляя его в формулу (3.61), получаем для средней скорости упорядоченного движения электронов

$$\langle v \rangle = \frac{|q_0| E}{2m_{\text{эл}}} \cdot \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle u \rangle} = \frac{|q_0| \langle \lambda \rangle}{2m_{\text{эл}} \langle u \rangle} E. \quad (3.63)$$

Подставляя выражение (3.63) для средней скорости упорядоченного движения в формулу (3.58) для плотности тока, имеем

$$j = \frac{n|q_0|^2 \langle \lambda \rangle}{2m_{\text{эл}} \langle u \rangle} E = \sigma E, \quad (3.64)$$

где введена *удельная проводимость материала*  $\sigma$  ( $\sigma = n|q_0|^2 \langle \lambda \rangle / (2m_{\text{эл}} \langle u \rangle)$ ).

Выражение (3.64) называется *законом Ома в дифференциальной форме*. Или в векторном виде закон Ома можно записать следующим образом:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E}, \quad (3.65)$$

где  $\rho = \frac{1}{\sigma}$  — *удельное сопротивление материала* проводника (сопротивление проводника единичной длины и единичной площади поперечного сечения). Согласно закону Ома плотность электрического тока прямо пропорциональна напряженности внешнего электрического поля.

### 3.2.3. Зависимость удельного сопротивления проводника от температуры. Сверхпроводимость

Удельное сопротивление  $\rho$  проводника зависит только от его материала и температуры. Оно численно равно сопротивлению  $R$  проводника при  $l = 1$  м и  $S = 1$  м<sup>2</sup>.

Для чистых металлических проводников в области комнатных температур удельное сопротивление практически линейно возрастает с повышением температуры, а именно:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (3.66)$$

где  $\rho_0$  — удельное сопротивление проводника при температуре  $t = 0^\circ\text{C}$ ;  $t$  — температура проводника по шкале Цельсия.

Входящий в формулу параметр  $\alpha$  называют *температурным коэффициентом сопротивления* (ТКС), он численно равен относительному изменению удельного сопротивления проводника при повышении температуры проводника на  $1^\circ\text{C}$ :

$$\alpha = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0 t}. \quad (3.67)$$

Для чистых металлов ТКС  $\alpha$  является положительной величиной, примерно равной  $(\alpha \approx 1/273) \text{K}^{-1}$ . При низких температурах, когда колебания положительных ионов кристаллической решетки не оказывают существенного влияния на движение свободных электронов, удельное сопротивление  $\rho$  не изменяется с температурой, оставаясь постоянной величиной (рис. 3.21, график 1).

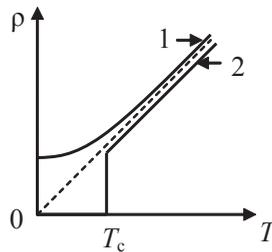


Рис. 3.21

Для многих металлов при определенной температуре  $T_c$  (ее называют температурой перехода в сверхпроводящее состояние,  $T_c \leq 20 \text{K}$ ) удельное сопротивление металла обращается в ноль ( $\rho = 0$ ), металл при  $T < T_c$  будет находиться в сверхпроводящем состоянии (рис. 3.21, график 2).

Для использования в практических целях необычных свойств сверхпроводящего состояния необходимо создавать материалы с высокими значениями температуры  $T_c$  (комнатные температуры и выше).

На этом пути в 1968 г. для металлооксидных соединений были получены  $T_c = (70-120)$  К, это открытие получило название явления высокотемпературной сверхпроводимости.

Отметим, что ТКС  $\alpha$  может и уменьшаться с повышением температуры ( $\alpha < 0$ ). Это, например, наблюдается для растворов электролитов и для полупроводников, что связано с увеличением в них концентрации свободных носителей заряда при повышении температуры.

### 3.2.4. Сопротивление проводника. Закон Ома для однородного участка цепи в интегральной форме

Воспользуемся законом Ома (3.65) и формулой для определения плотности тока (3.57). Приравнявая правые части этих формул, получим

$$\frac{I}{S} = \frac{E}{\rho}, \Rightarrow \frac{I}{S} = -\frac{d\varphi}{\rho dl}, \Rightarrow \frac{Idl}{S}\rho = -d\varphi, \quad (3.68)$$

где  $d\varphi$  — разность потенциалов на участке проводника длиной  $dl$  ( $E = -d\varphi/dl$ ).

Проинтегрируем выражение (3.80), учитывая, что ток является постоянным,

$$I \int_1^2 \frac{\rho}{S} dl = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \Rightarrow I \int_1^2 \frac{\rho}{S} dl = \varphi_1 - \varphi_2,$$

$$I \int_1^2 \frac{\rho}{S} dl = U. \quad (3.69)$$

В формуле (3.69) учтено, что напряжение на однородном участке равно разности потенциалов на его концах ( $U = \varphi_1 - \varphi_2$ ).

На основе формулы (3.69) вводится понятие *электрического сопротивления  $R$  однородного участка цепи*: сопротивление  $R$  характеризует свойство проводника препятствовать протеканию по нему электрического тока и является коэффициентом пропорциональности между током и напряжением на однородном участке цепи.

$$R = \frac{U}{I}. \quad (3.70)$$

Выражение (3.70) носит название закона Ома в интегральной форме. Из формул (3.69) и (3.70) для сопротивления проводника получаем

$$R = \int_1^2 \frac{\rho}{S} dl. \quad (3.71)$$

В случае *прямолинейного проводника постоянного сечения и однородного по составу* формула для сопротивления проводника (3.71) переписывается в виде

$$R = \frac{\rho l}{S}. \quad (3.72)$$

Сопротивление  $R$  однородного участка цепи не зависит ни от  $U$ , ни от  $I$ , но определяется геометрическими размерами проводника, его материалом и температурой.

### 3.2.5. Закон Джоуля — Ленца в интегральной и дифференциальной форме

Выведем формулу для расчета количества теплоты  $Q$ , выделяемой в проводнике при протекании по нему электрического тока. Если в магнитном поле проводника с током отсутствует перемещение других тел (заряженных частиц других проводников с током) и не изменяется химический состав проводника (нет электролиза), то тогда работа сил электрического поля по перемещению заряда в проводнике целиком расходуется на выделение теплоты.

В этом случае количество теплоты  $dQ$ , выделяемое за малый промежуток времени  $dt$ , можно рассчитать таким образом:

$$dQ = dA = dqU = IUdt = \frac{U^2}{R} dt = I^2 R dt. \quad (3.73)$$

Для конечного промежутка времени в случае переменного тока получим

$$Q = \int_0^t dQ = \int_0^t I^2 R dt, \quad (3.74)$$

а для постоянного тока ( $I = \text{const}$ )

$$Q = I^2 R t. \quad (3.75)$$

Формула (3.75) получила название *закона Джоуля–Ленца в интегральной форме*: количество теплоты, выделяемое в проводнике при протекании по нему электрического тока, равно произведению квадрата силы тока на сопротивление проводника и на время протекания по нему тока.

Введем *удельную тепловую мощность*  $w$ :

$$w = \frac{dQ}{dVdt}, \quad (3.76)$$

она определяет количество теплоты  $dQ$ , выделяемое в элементарном (бесконечно малом) объеме  $dV$ , расположенном вблизи точки, взятой внутри проводника, за малое время  $dt$ .

Воспользовавшись формулами (3.76), (3.73) и (3.57) для удельной тепловой мощности, имеем

$$w = \frac{dQ}{dVdt} = \frac{I^2 R dt}{dVdt} = \frac{(jS)^2 \rho dl}{S dl S} = j^2 \rho = (\sigma E)^2 \rho = \sigma E^2 = \vec{j} \vec{E},$$

$$w = \sigma E^2 = \vec{j} \vec{E}. \quad (3.77)$$

Формула (3.77) является *законом Джоуля–Ленца в дифференциальной форме*.

### 3.2.6. Электродвижущая сила источника тока. Закон Ома для неоднородного участка цепи

Возьмем замкнутую электрическую цепь, содержащую источник тока, и рассмотрим, как протекает по ней постоянный ток, т. е. как происходит движение положительного заряда ( $+q$ ) по этой цепи (см. рис. 3.22, *a*).

Во внешней части цепи сопротивлением  $R$  под действием кулоновских сил заряд ( $+q$ ) перемещается от точек с большим потенциалом к точкам с меньшим потенциалом. Для дальнейшего движения заряда (внутренняя часть цепи, источник тока) необходимо переместить заряд к точкам с большим потенциалом. Кулоновские силы сделать это не могут, так как под их действием положительный заряд может перемещаться только в сторону точек с меньшим потенциалом.

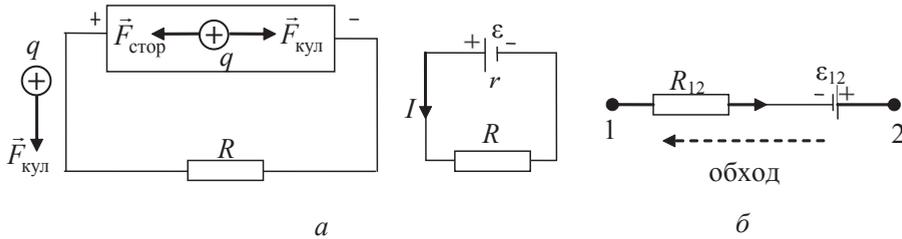


Рис. 3.22

Поэтому в источнике тока на заряды, кроме кулоновских сил, должны действовать так же и *сторонние силы* — это силы не кулоновского происхождения, они совершают работу по разделению разноименных зарядов и переводят заряд  $(+q)$  от отрицательного полюса источника тока к его положительному полюсу. Таким образом, завершается полный цикл движения заряда по замкнутой цепи, в ней за счет работы сторонних сил наблюдается постоянное движение заряда, протекает постоянный ток.

Источник тока можно охарактеризовать сопротивлением  $r$  (сопротивление внутренней части цепи) и *электродвижущей силой* (ЭДС)  $\varepsilon$  — она определяет работу сторонних сил по перемещению точечного положительного заряда в один кулон от отрицательного полюса к его положительному полюсу

$$\varepsilon = \frac{A_{\text{стор}}}{q_+}. \quad (3.78)$$

Изображение источника тока на схемах приведено на рис. 3.22, а.

Природа сторонних сил может быть любой, от них требуется лишь способность разделять разноименные заряды. Это могут быть силы трения, силы химических реакций, протекающих в гальванических элементах, силы магнитного поля, силы вихревого электрического поля и т. д.

Участок цепи, на котором одновременно действуют и сторонние и кулоновские силы, называют *неоднородным участком цепи* (рис. 3.22, б). Работу кулоновских сил по перемещению электрического заряда на этом участке характеризует разность потенциалов  $(\varphi_1 - \varphi_2)$ , а сторонних сил — действующая на этом участке цепи ЭДС  $\varepsilon_{1,2}$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{\text{кул}1,2}}{q}, \quad \varepsilon_{1,2} = \frac{A_{\text{стор}1,2}}{q}. \quad (3.79)$$

Для неоднородного участка цепи вводится новая величина, называемая *напряжением*  $U_{1,2}$ , она характеризует общую работу сторонних и кулоновских сил на неоднородном участке цепи

$$U_{1,2} = \frac{A_{\text{кул}1,2} + A_{\text{стоп}1,2}}{q} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{1,2}. \quad (3.80)$$

На однородном участке цепи ( $\varepsilon_{1,2} = 0$ ) напряжение равно разности потенциалов:

$$U_{1,2} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (3.81)$$

Покажем, что и для неоднородного участка цепи также выполняется закон Ома. Для этого используем закон сохранения энергии, а именно: количество теплоты  $dQ_{1,2}$ , выделяемое на неоднородном участке цепи за малый промежуток времени  $dt$ , равно суммарной работе сторонних и кулоновских сил по перемещению зарядов по этому участку цепи

$$\begin{aligned} dQ_{1,2} &= dA_{\text{кул}1,2} + dA_{\text{стоп}1,2} \Rightarrow \\ \Rightarrow I^2 R_{1,2} dt &= dq(\varphi_1 - \varphi_2) + dq\varepsilon_{1,2} = dqU_{1,2} = IU_{1,2} dt \Rightarrow U_{1,2} = IR_{1,2}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Формула (3.82) представляет собой закон Ома для неоднородного участка цепи. Учитывая, что  $\varepsilon_{1,2}$ ,  $(\varphi_1 - \varphi_2)$ ,  $I$  являются алгебраическими величинами и могут быть как больше, так и меньше нуля, запишем закон Ома (3.82) в следующем виде:

$$\pm IR_{1,2} = (\varphi_{\text{нач}} - \varphi_{\text{кон}}) \pm \varepsilon_{1,2}, \quad (3.83)$$

где  $\varphi_{\text{нач}}$  и  $\varphi_{\text{кон}}$  — потенциалы начальной и конечной точек участка цепи. Выбор знаков в законе Ома для неоднородного участка цепи (см. формулу (3.83)) производится следующим образом:

— произвольно выбирается направление обхода контура (см. рис. 3.22, б);

— если источник тока создает ток в направлении обхода, то его ЭДС ( $\varepsilon_{1,2}$ ) берется в формуле (3.83) со знаком «+», в противном случае — со знаком «-»;

— если направление тока на участке цепи совпадает с направлением обхода, то перед силой тока ставится знак «+», в противном случае — со знаком «-».

С учетом знаков, для участка цепи, изображенного на рис. 3.22, б, формула (3.83) примет вид:

$$-IR_{1,2} = (\varphi_2 - \varphi_1) - \varepsilon_{1,2},$$

где начальной точкой участка считается точка, с которой начинается обход участка цепи.

В случае неоднородного участка цепи, когда в проводнике одновременно действуют и сторонние и кулоновские силы, формулы (3.77) и (3.89), выражающие законы Ома и Джоуля-Ленца в дифференциальной форме, примут вид:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}), \quad (3.84)$$

$$w = \vec{j}(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}). \quad (3.85)$$

### 3.2.7. Правила Кирхгофа

Эти правила были сформулированы Кирхгофом в 1847 году, они используются для расчета разветвленных цепей постоянного и квазистационарного тока — цепей, содержащих несколько замкнутых контуров. Если записать закон Ома (3.83) для замкнутой цепи (для нее начальная и конечная точки совпадают, т. е.  $\varphi_{\text{нач}} = \varphi_{\text{кон}}$ ), то из него следует второе правило Кирхгофа:

$$\pm \sum_{i=1}^N I_i R_i = \pm \sum_{l=1}^N \varepsilon_l. \quad (3.86)$$

Согласно *второму правилу Кирхгофа* алгебраическая сумма падений напряжения на разных участках замкнутой цепи равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этой цепи. Число независимых уравнений (ни одно из них не является следствием других), которые можно записать по второму правилу, равно числу замкнутых контуров (цепей), которые нельзя получить наложением одного на другой. Так, для схемы, приведенной на рис. 3.23, число независимых уравнений равно двум, один из трех контуров получается наложением двух других.

Рассмотрим выбор знаков в формуле (3.86). Для этого сначала произвольно указывают направление токов на разных участках разветвленной цепи и указывают направление обхода замкнутых контуров (цепей). Для силы тока выбирают знак плюс («+») при совпадении на-

правления тока с направлением обхода контура, в противном случае — знак «-». Для ЭДС  $\varepsilon$  источника тока выбирается знак плюс, если она повышает свой потенциал в направлении обхода контура (происходит переход от отрицательного полюса источника к его положительному полюсу), в противном случае выбирают знак минус.

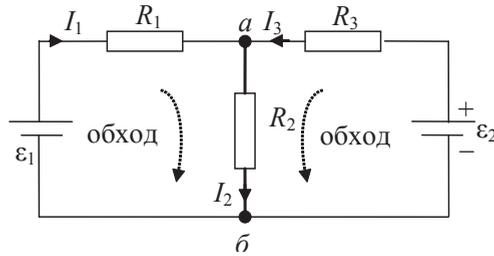


Рис. 3.23

Для приведенной на рис. 3.23 схеме по второму правилу Кирхгофа можно записать два уравнения

$$\begin{cases} I_1 R_1 + I_2 R_2 = \varepsilon_1 \\ I_2 R_2 + I_3 R_3 = \varepsilon_2 \end{cases}$$

Для формулировки первого правила Кирхгофа введем понятие узла электрической цепи. *Узел электрической цепи* — это точка цепи, в которой сходятся три или более проводников. Тогда из закона сохранения электрического заряда (он не может накапливаться в какой-либо точке цепи) следует *первое правило Кирхгофа*:

$$\pm \sum_{i=1} I_i = 0, \quad (3.87)$$

согласно которому *алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю*.

Принято брать силу тока  $I$  со знаком «+», если ток входит в узел, и со знаком минус «-», если ток выходит из узла. Число независимых уравнений, которые можно записать по этому правилу, равно числу узлов разветвленной цепи минус один. Так, для цепи, приведенной на рис. 3.23, можно записать только одно уравнение, например, для узла  $b$

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

Система уравнений (3.86) и (3.87) позволяет провести расчет электрических цепей при различных исходных данных. Для разветвленной цепи, содержащей большое число контуров, для решения системы уравнений необходимо использовать известный в алгебре метод определителей.

---

### Вопросы и задания для самоконтроля к разделу «Электричество»

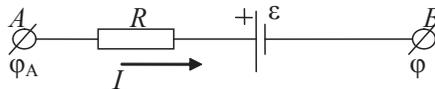
---

1. В чем заключается свойство дискретности электрического заряда?
2. Сформулируйте закон сохранения электрического заряда. Что произойдет если проводником соединить две одинаковые металлические сферы, одна из которых не заряжена, а заряд другой равен  $q$ ?
3. Запишите закон Кулона для вакуума и для среды. В чем заключается физический смысл диэлектрической проницаемости среды  $\epsilon$ ?
4. Дайте определение напряженности  $\vec{E}$  электростатического поля. Сформулируйте принцип суперпозиции для напряженности поля.
5. По тонкому металлическому кольцу равномерно распределен заряд  $q$ . Что происходит с модулем напряженности поля в точках, расположенных на оси кольца, при увеличении расстояния от центра кольца?
6. Запишите формулу — определение для потока  $\Phi_E$  вектора напряженности электростатического поля. В чем заключается физический смысл потока вектора  $\vec{E}$ ?
7. Сформулируйте и запишите теорему Гаусса — Остроградского для вектора напряженности электрического поля.
8. Точечный заряд  $-6q$  находится в центре некоторой замкнутой поверхности. Что произойдет с потоком вектора напряженности электрического поля через данную поверхность, если внутрь сферы добавить заряд  $-q$ , а снаружи  $+q$ ?
9. Точечный заряд  $+q$  находится в центре сферической поверхности. Что произойдет с потоком вектора напряженности электри-

ческого поля через поверхность сферы, если увеличить радиус сферической поверхности?

10. Электростатическое поле создано равномерно заряженным с объемной плотностью  $\rho$  заряда шаром. Диэлектрическая проницаемость материала шара —  $\epsilon$ , радиус шара —  $R$ . Пользуясь теоремой Гаусса — Остроградского, получите зависимость напряженности поля  $E$  от расстояния  $r$  от центра шара. Нарисуйте график зависимости  $E(r)$ .
11. Запишите формулу для вычисления потенциальной энергии взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга. Каким образом выбирается обычно значение константы в этой формуле?
12. Сформулируйте определение потенциала  $\varphi$  электростатического поля. Запишите формулу для потенциала поля, созданного точечным зарядом.
13. В чем состоит принцип суперпозиции для потенциала? Запишите его.
14. Потенциал однородного электрического поля увеличивается вдоль оси  $Ox$ . Как направлен вектор напряженности  $\vec{E}$  электрического поля?
15. Чему будет равна работа сил электростатического поля по перемещению электрического заряда  $q > 0$  из точки 1 в точку 2 по эквипотенциальной поверхности?
16. Сформулируйте определение емкости уединенного проводника и запишите соответствующую формулу.
17. Металлический шар имеет положительный заряд и создает вокруг себя электрическое поле. Что произойдет с емкостью шара, если к нему поднести отрицательно заряженное тело?
18. От каких параметров зависит емкость конденсатора? Как изменится емкость плоского конденсатора при увеличении расстояния между его обкладками?
19. После отключения источника постоянного напряжения из плоского конденсатора удалили диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 6$ . Как изменилась при этом энергия конденсатора?
20. Сформулируйте определение объемной плотности энергии электрического поля. От каких физических величин зависит объемная плотность энергии электрического поля?

21. Что понимают под силой тока? Запишите формулу для силы постоянного тока.
22. Сформулируйте определение плотности тока. От каких параметров зависит величина плотности тока?
23. Что называют однородным участком цепи? Запишите закон Ома для однородного участка цепи и изобразите вольтамперную характеристику однородного участка цепи.
24. Как изменяется сопротивление проводника с ростом температуры? Запишите соответствующую формулу. Сформулируйте физический смысл температурного коэффициента сопротивления.
25. В чем состоит закон Джоуля — Ленца? Как изменится количество теплоты  $Q$ , выделяемое электроплиткой за некоторое время  $t$ , при укорочении спирали электроплитки в 1,5 раза?
26. Что называют сторонними силами? Приведите примеры сторонних сил.
27. Сформулируйте определение неоднородного участка цепи. Что называют напряжением на неоднородном участке цепи? Запишите выражение для напряжения на неоднородном участке цепи.
28. Запишите закон Ома (с учетом знаков) для неоднородного участка цепи, изображенного на рисунке.



29. В чем заключается физический смысл закона Ома в дифференциальной форме? Постройте график зависимости плотности тока  $\vec{j}$  от напряженности  $\vec{E}$  поля в проводнике.
30. Что понимают под удельной тепловой мощностью тока? Запишите формулу, выражающую закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме. Поясните смысл всех входящих в нее величин.

## 4. Магнетизм

---

---

### 4.1. Магнитное поле и его характеристики

---

---

#### 4.1.1. Магнитное поле. Опытные данные по обнаружению магнитного поля

**Т**ермин «магнитное поле» был введен Эрстедом (1820 г.) в связи с тем, что возбуждаемое электрическим током поле оказывало ориентирующее действие на магнитную стрелку. Также в опытах Ампера (1820 г.) было установлено, что два параллельных прямолинейных проводника, по которым текут токи одного направления, притягиваются друг к другу, если же токи имеют противоположные направления — проводники будут отталкиваться (рис. 4.1).

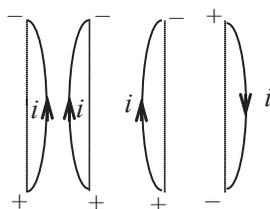


Рис. 4.1

Если же ток течет лишь по одному проводнику, то силы взаимодействия между проводниками отсутствуют.

Такое взаимодействие, обусловленное движением зарядов (электрический ток — направленное движение зарядов), назвали *магнитным взаимодействием* и осуществляется оно посредством *магнитного поля*.

Магнитное поле — форма существования материи, являющаяся частью электромагнитного поля, которая создается проводниками с током, движущимися электрическими зарядами, намагниченными тела-

ми и изменяющимся со временем электрическим полем. Магнитное поле действует только на движущиеся частицы и тела, обладающие электрическим зарядом. На намагниченные тела магнитное поле действует независимо от того, движутся они или неподвижны.

#### 4.1.2. Магнитное взаимодействие движущихся зарядов в вакууме

Опыт показывает, что сила магнитного взаимодействия движущихся зарядов  $q_1$  и  $q_2$

$$F_M \sim \frac{q_1 v_1 q_2 v_2}{r^2},$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — модули скоростей зарядов,  $r$  — расстояние между ними.

Запишем общую формулу для силы магнитного взаимодействия двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , движущихся со скоростями  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$

$$\vec{F}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[q_1 \vec{v}_1 \times [q_2 \vec{v}_2 \times \vec{r}]]}{r^3}, \quad (4.1)$$

где введена магнитная постоянная  $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м.

В соответствии с идеей близкодействия магнитное взаимодействие между зарядами осуществляется посредством магнитного поля. Так, например, можно считать, что заряд  $q_1$  взаимодействует в месте своего расположения с магнитным полем, создаваемым зарядом  $q_2$ . Это приводит к следующей форме записи выражения (4.1):

$$\vec{F}_M = \left[ q_1 \vec{v}_1 \times \left\{ \frac{\mu_0 [q_2 \vec{v}_2 \times \vec{r}]}{4\pi r^3} \right\} \right] = [q_1 \vec{v}_1 \times \vec{B}_{3_2}], \quad (4.2)$$

где введена силовая характеристика магнитного поля заряда  $q_2$  — вектор магнитной индукции  $\vec{B}_{3_2}$ . В общем случае для  $\vec{B}_3$  можно записать:

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu\mu_0 [q\vec{v} \times \vec{r}]}{4\pi r^3}, \quad \Rightarrow \quad B_3 = \frac{\mu\mu_0 |q| v \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad \alpha = \left( \vec{v}, \vec{r} \right). \quad (4.3)$$

Здесь  $\vec{r}$  — вектор, проведенный от заряда  $q$  в рассматриваемую точку пространства.

Для общности выражений в формулу (4.2) и в последующие формулы вводится относительная магнитная проницаемость  $\mu$  среды, которая учитывает изменение магнитного поля в присутствии вещества. Для вакуума  $\mu = 1$ .

Заряды, приведенные на рис. 4.2, участвуют в двух взаимодействиях: электрическом и магнитном. Сила их магнитного взаимодействия определяется формулой (4.1), а электрическая сила — законом Кулона:

$$\vec{F}_{\text{эл}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}, \quad (4.4)$$

причем сила магнитного взаимодействия зарядов существенно зависит от скорости движения зарядов, обращаясь в ноль при  $v = 0$ , и в данном случае  $\vec{F}_M$  направлена противоположно  $\vec{F}_{\text{эл}}$ . Отметим, что  $\vec{F}_M$  значительно меньше по модулю  $\vec{F}_{\text{эл}}$  ( $F_M / F_{\text{эл}} = v^2 / c^2 \ll 1$ ). Однако для проводников с током сила электрического взаимодействия равна нулю и остается только сила магнитного взаимодействия, которая может достигать значительной величины.

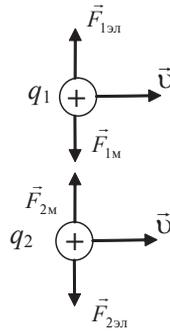


Рис. 4.2

Направление вектора  $\vec{B}_3$  (см. рис. 4.3, а) можно определить по следующим правилам: 1) векторного произведения двух векторов — вектор  $\vec{B}_3$  перпендикулярен плоскости векторов  $\vec{v}$  и  $\vec{r}$ . Если смотреть с конца вектора  $\vec{B}_3$ , то кратчайший поворот от  $\vec{v}$  к  $\vec{r}$  будет виден против часовой стрелки; 2) по правилу левой руки — четыре пальца направляют по скорости движения заряда, вектор  $\vec{r}$  входит в ладонь: отогнутый на  $90^\circ$  большой палец покажет направление  $\vec{B}_3$ ; 3) по правилу

правого буравчика — вращательное движение буравчика производим от  $\vec{v}$  к  $\vec{r}$ , тогда поступательное движение буравчика покажет направление  $\vec{B}_3$ . Все эти правила справедливы для положительного заряда, в случае отрицательного заряда полученное направление  $\vec{B}_3$  нужно изменить на противоположное.

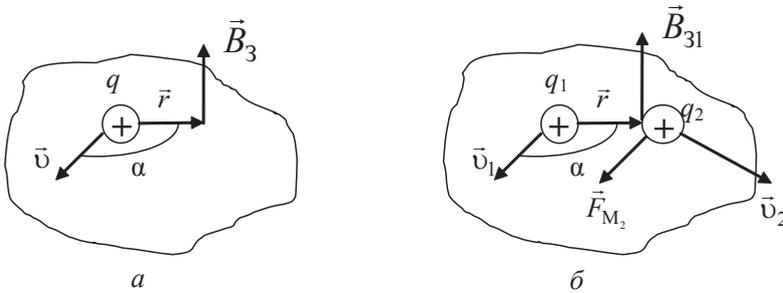


Рис. 4.3

Для определения направления силы магнитного взаимодействия двух зарядов необходимо сначала найти направление вектора индукции  $\vec{B}_3$  одного из зарядов, а затем по правилам, перечисленным выше, найти направление  $\vec{F}_{M_2}$  (рис. 4.3, б).

### 4.1.3. Вектор индукции магнитного поля. Линии магнитной индукции. Принцип суперпозиции

Источниками магнитного поля являются не только движущиеся заряды, но и проводники с токами, а также постоянные магниты. Во всех случаях силовой характеристикой магнитного поля является *вектор индукции магнитного поля*  $\vec{B}$  (*вектор магнитной индукции*, или *магнитная индукция*).

Для графического изображения стационарного, т. е. не изменяющегося со временем, магнитного поля пользуются методом линий магнитной индукции.

*Линиями магнитной индукции* (силовыми линиями магнитного поля) называются линии, проведенные в магнитном поле так, что в каждой точке поля касательная к линии магнитной индукции совпадает с направлением вектора  $\vec{B}$  в этой точке поля (см. рис. 4.4, а).

Вид линий магнитной индукции простейших магнитных полей показан на рис. 4.4. Из рисунка видно, что эти линии охватывают проводник с током, создающий магнитное поле. Линии  $\vec{B}$  прямого тока — концентрические окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к току, центры которых лежат на линии тока (рис. 4.4, а).

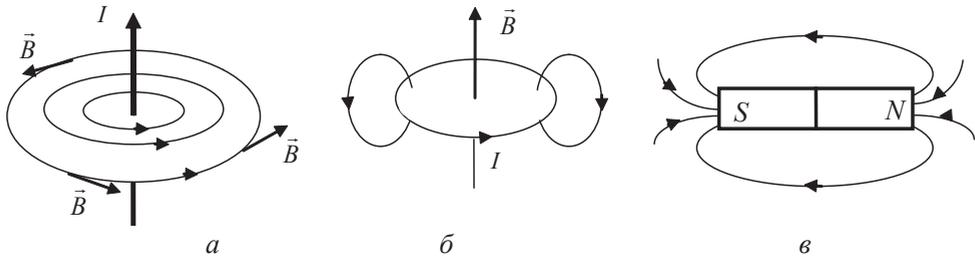


Рис. 4.4

Линии  $\vec{B}$  тока, текущего по кольцевому проводнику, в плоскости кольца перпендикулярны к нему. Вблизи проводника они лежат в плоскостях, перпендикулярных проводнику. Направление линий индукции определяется по *правилу буравчика* (правого винта): если ввинчивать буравчик по направлению вектора плотности тока в проводнике, то направление движения рукоятки буравчика укажет направление линий магнитного поля. Линии индукции магнитного поля всегда *замкнуты* (в отличие от линий напряженности электростатического поля) и *не пересекаются*. Линии магнитной индукции полосового магнита выходят из северного ( $N$ ) полюса и входят в южный ( $S$ ), (рис. 4.4, в).

Для магнитного поля, как и для электрического, *справедлив принцип суперпозиции*: магнитная индукция  $\vec{B}$  результирующего поля, создаваемого несколькими источниками, равна векторной сумме индукций полей ( $\vec{B}_1$ ,  $\vec{B}_2$ ,  $\vec{B}_3$  и т. д.), создаваемых каждым источником по отдельности:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \dots \quad (4.5)$$

#### 4.1.4. Элемент тока. Закон Био – Савара – Лапласа (БСЛ)

Элемент тока  $I d\vec{l}$  — это вектор, направленный в каждой точке проводника с током  $I$  параллельно вектору  $\vec{j}$  плотности тока и равный по модулю произведению модуля силы тока  $|I|$  на элемент длины  $dl$  проводника. Он является электронейтральным и создает только магнитное поле. Так, например, в металлах положительный заряд ионов решетки элемента длиной  $dl$  проводника компенсируется движущимся со скоростью  $\langle \vec{v} \rangle$  суммарным отрицательным зарядом  $dq$  в элементе тока.

Найдем индукцию  $d\vec{B}$  магнитного поля, создаваемого элементом тока. При пропускании по проводнику тока  $I$  в элементе длиной  $dl$  проводника объемом  $Sdl$  ( $S$  — площадь поперечного сечения проводника, рис. 4.5, *a*) будет все время находиться и двигаться со скоростью направленного движения  $\langle \vec{v} \rangle$  один и тот же суммарный заряд  $dq$

$$I d\vec{l} = \frac{dq}{dt} d\vec{l} = dq \frac{d\vec{l}}{dt} = dq \cdot \langle \vec{v} \rangle.$$

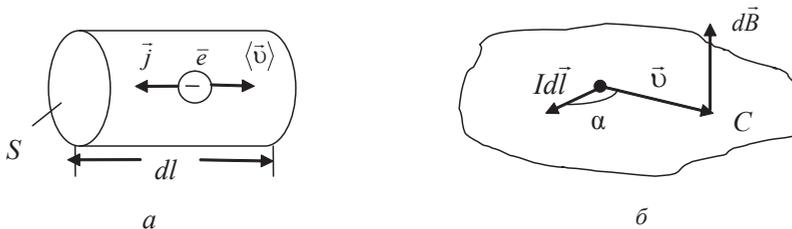


Рис. 4.5

Учитывая малые размеры элемента тока, можно для вектора магнитной индукции  $d\vec{B}$  заряда  $dq$  использовать формулу (4.3) как для магнитного поля точечного заряда  $dq$

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 [q \langle \vec{v} \rangle \times \vec{r}]}{4\pi r^3} = \frac{\mu\mu_0 [I d\vec{l} \times \vec{r}]}{4\pi r^3}.$$

Итак, индукция магнитного поля  $d\vec{B}$ , создаваемого элементом тока  $I d\vec{l}$  в некоторой точке  $C$ , определяется следующим выражением:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 [Id\vec{l} \times \vec{r}]}{4\pi r^3}, \quad \Rightarrow dB = \frac{\mu\mu_0 Idl \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad \alpha = \left( Id\vec{l}, \hat{\vec{r}} \right), \quad (4.6)$$

где  $\vec{r}$  — вектор, проведенный от элемента тока к рассматриваемой точке пространства,  $r$  — расстояние от элемента тока до данной точки.

Формула (4.6) получила название — *закон Био — Савара — Лапласа* (БСЛ), который определяет индукцию магнитного поля, создаваемого элементом тока.

Вектор  $d\vec{B}$  направлен в точке  $C$  перпендикулярно плоскости векторов  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$  (см. рис. 4.5, б). Его направление определяется по правилу буравчика: рукоятку буравчика вращаем от элемента тока  $Id\vec{l}$  к вектору  $\vec{r}$  по наименьшему углу, тогда поступательное движение острия буравчика укажет направление вектора  $d\vec{B}$ .

Закон Био — Савара — Лапласа используется для расчета магнитных полей, созданных проводниками с токами различной конфигурации. При этом для расчета индукции магнитного поля проводника с током нужно:

- 1) разбить его на отдельные элементы тока (представить его как набор элементов тока);
- 2) по закону БСЛ найти вектора индукции  $d\vec{B}$  магнитного поля от каждого элемента тока в рассматриваемой точке;
- 3) суммировать их по правилу сложения векторов (принцип суперпозиции магнитных полей).

Таким образом, получаем, что индукция магнитного поля проводника с током находится по формуле

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int \frac{\mu\mu_0 [Id\vec{l} \times \vec{r}]}{4\pi r^3}. \quad (4.7)$$

#### 4.1.5. Примеры применения закона Био — Савара — Лапласа к расчету магнитных полей различных проводников с электрическим током

**Пример 1.** Магнитное поле прямолинейного проводника конечной длины с током  $I$ .

Рассчитаем индукцию магнитного поля прямолинейного проводника конечной длины с током  $I$  в т.  $A$  (см. рис. 4.6, а). Положение

т.  $A$  можно задать расстоянием  $a$  до проводника и углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ;  $\alpha_1$  — угол между первым элементом тока (он расположен там, откуда начинается ток) и вектором  $\vec{r}_1$ , проведенным от этого элемента тока в т.  $A$ ;  $\alpha_2$  — угол между последним элементом тока (он расположен там, где заканчивается ток) и вектором  $\vec{r}_2$ , проведенным от этого элемента тока в т.  $A$ .

Из рис. 4.6,  $a$  видно, что все вектора  $d\vec{B}$  направлены перпендикулярно плоскости чертежа от нас, следовательно, также направлен и вектор  $\vec{B}$  суммарного поля. Тогда формула (4.3) для модуля вектора  $\vec{B}$  запишется так:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \sin \alpha}{r^2}. \quad (4.8)$$

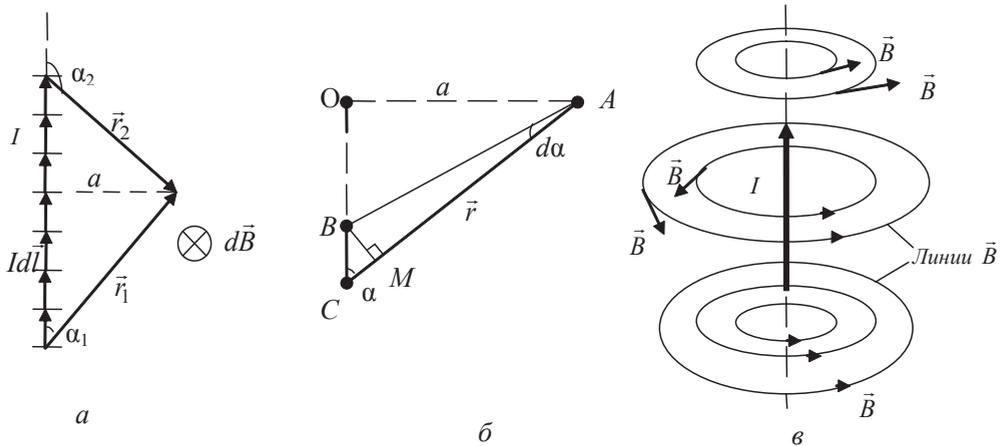


Рис. 4.6

Для того чтобы взять такой интеграл, необходимо рассмотреть чертеж, приведенный на рис. 4.6,  $b$ , где приведен произвольный элемент длиной  $dl$  проводника. Из него следует:

$$\triangle OAC \sim \triangle BCM: \frac{OA}{AC} = \frac{BM}{BC}; \frac{a}{r} = \frac{rd\alpha}{dl}; \frac{dl}{r^2} = \frac{d\alpha}{a}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (4.8), получим

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (4.9)$$

Направление вектора  $\vec{B}$  можно определить, предварительно проведя линии  $\vec{B}$  прямого проводника с током — это окружности, охватывающие проводник и лежащие в плоскости, перпендикулярной к нему; направление линий  $\vec{B}$  связано правилом правого буравчика с направлением тока в проводнике. Тогда вектор  $\vec{B}$  в каждой точке линии будет направлен по касательной к ней (см. рис. 4.6, в).

В частном случае бесконечно длинного проводника с током ( $\alpha_1 \rightarrow 0^\circ$ ,  $\alpha_2 \rightarrow 180^\circ$ ) получим

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (4.10)$$

Обычно расстояние от проводника до рассматриваемой точки обозначают буквой  $r$ , поэтому в формулах (4.9) и (4.10), в общем случае, вместо буквы  $a$  пишут букву  $r$ .

**Пример 2.** Магнитное поле в центре кольцевого тока.

Пусть по кольцу радиуса  $R$  протекает постоянный ток силой  $I$  (см. рис. 4.7, а).

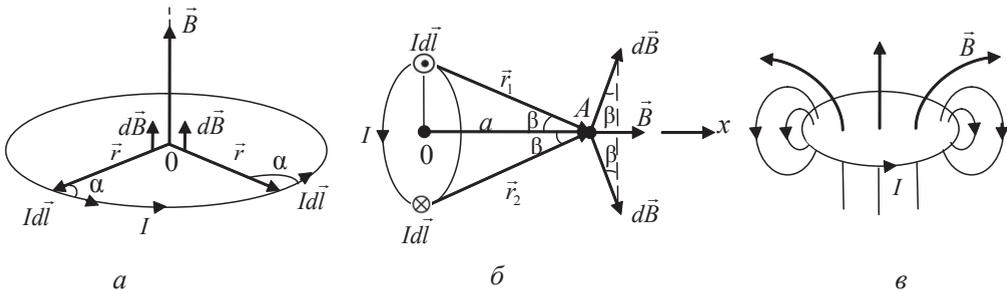


Рис. 4.7

Необходимо найти индукцию магнитного поля в центре кольцевого тока, в т.  $O$ . Для этого разбиваем кольцевой ток на элементы тока  $Id\vec{l}$  (на рис. 4.7, а указано два элемента тока) и находим направление векторов магнитной индукции  $d\vec{B}$  всех элементов тока в центре кольца (они будут направлены перпендикулярно плоскости кольца, вверх). Суммарный вектор  $\vec{B}$  также будет направлен вертикально вверх. Для определения его модуля берем проекцию формулы (4.7) на вертикальную ось и получаем

$$B = \oint dB = \oint \frac{\mu\mu_0 Idl \sin \alpha}{4\pi r^2} = \frac{\mu\mu_0 I \sin 90^\circ}{4\pi R^2} \oint dl = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R = \frac{\mu\mu_0 I}{2R},$$

где учтено, что в данном случае  $r = R$ .

Итак, в центре кольцевого тока модуль вектора магнитной индукции будет равен

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}. \quad (4.11)$$

**Пример 3.** Магнитное поле на оси кольцевого тока.

Рассчитаем индукцию магнитного поля в т.  $A$ , находящейся на оси кольцевого тока  $I$  радиуса  $R$  на расстоянии  $a$  от его центра (см. рис. 4.7, б).

На рис. 4.7, б указаны вектора  $d\vec{B}$ , созданные верхним и нижним элементами тока в т.  $A$ . Они образуют угол  $\beta$  с вертикальным направлением. Вектора  $d\vec{B}$ , созданные всеми элементами тока, образуют конус векторов  $d\vec{B}$ . Из соображений симметрии следует, что суммарный вектор  $\vec{B}$  в точке  $A$  будет направлен по оси кольца. Проектируя уравнение (4.7) на ось  $Ox$ , получим

$$B = \oint dB \sin \beta = \frac{\mu\mu_0 I \sin 90^\circ \sin \beta}{4\pi r^2} \oint dl = \frac{\mu\mu_0 I \sin \beta}{4\pi r^2} \cdot 2\pi R = \frac{\mu\mu_0 IR^2}{2(R^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (4.12)$$

Для центра кольцевого тока (т.  $O$ ,  $a = 0$ ) из формулы (4.12) получаем формулу (4.11).

Линии  $\vec{B}$  кольцевого тока представляют собой окружности, перпендикулярные плоскости кольца, их направление связано правилом правого буравчика с направлением тока (см. рис. 4.7, в).

#### 4.1.6. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции $\vec{B}$

Возьмем в магнитном поле воображаемую замкнутую линию — контур  $\Gamma$  (см. рис. 4.8, а). Введем вектор  $d\vec{l}$  — по модулю он равен элементу длиной  $dl$  контура, в каждой точке контура он направлен по касательной в направлении обхода контура (см. рис. 4.8, а).

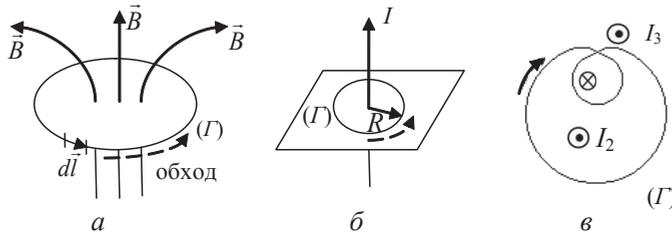


Рис. 4.8

Интеграл вида

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} d\vec{l} = \oint_{(\Gamma)} B dl \cos \alpha, \quad \alpha = \left( \vec{B}, d\vec{l} \right),$$

получил название циркуляции вектора  $\vec{B}$  по замкнутому контуру  $(\Gamma)$ .

Можно доказать теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$ , которая в случае изотропного вещества читается следующим образом: *циркуляция вектора  $\vec{B}$  по произвольному замкнутому контуру  $(\Gamma)$  равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром, умноженной на  $\mu\mu_0$ :*

$$\oint_{(\Gamma)} B dl \cos \alpha = \mu\mu_0 \sum_i I_i. \quad (4.13)$$

Знак силы тока  $I$  в формуле (4.13) выбирается следующим образом: если направление тока связано с направлением обхода контура правилом правого буравчика, то выбирается знак плюс; если нет — знак минус.

Проверим теорему на примере прямолинейного проводника бесконечной длины с током  $I$ . Возьмем контур  $(\Gamma)$ , совпадающий с линией магнитной индукции радиуса  $R$ , а направление обхода контура выберем против часовой стрелки, т. е. по направлению линии  $\vec{B}$  (см. рис. 4.9, б). Тогда

$$\oint_{(\Gamma)} B dl \cos \alpha = \oint_{(\Gamma)} \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R} dl \cdot \cos 0 = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R} \oint_{(\Gamma)} dl = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R} \cdot 2\pi R = \mu\mu_0 I,$$

что и требовалось показать.

Циркуляция вектора  $\vec{B}$  по контуру  $(\Gamma)$ , приведенному на рис. 4.8, в, равна

$$\oint_{(l)} B dl \cos \alpha = \mu \mu_0 (2I_1 - I_2).$$

Это связано с тем, что ток  $I_1$  охватывается контуром два раза, поэтому в формулу входит коэффициент два; ток  $I_3$  контуром не охватывается, поэтому ток  $I_3$  в формулу не войдет.

#### 4.1.7. Применение теоремы о циркуляции вектора $\vec{B}$ к расчету магнитных полей проводников с током

Теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$  позволяет рассчитать модуль вектора  $\vec{B}$  в случаях определенной симметрии магнитного поля, т. е. когда известно направление вектора  $\vec{B}$  в каждой точке поля. *Отметим следующие этапы применения теоремы:* 1) из симметрии задачи сначала определяем направление вектора  $\vec{B}$  в любой точке поля. Если этого сделать нельзя, то для расчета поля (направления и модуля вектора  $\vec{B}$ ) необходимо использовать закон БСЛ и принцип суперпозиции для магнитных полей; 2) выбираем контур ( $l$ ) и рассчитываем циркуляцию вектора  $\vec{B}$  согласно ее определению; 3) рассчитываем сумму токов, охватываемых контуром; 4) применяем теорему для расчета модуля вектора  $\vec{B}$ .

Рассмотрим примеры расчета магнитного поля на основе теоремы о циркуляции вектора  $\vec{B}$ .

**Пример 1.** Магнитное поле бесконечно длинного соленоида.

Соленоид представляет собой проводник, навитый на цилиндрический каркас.

*1 этап.* Из симметрии задачи следует, что магнитное поле существует только внутри соленоида. Оно является однородным, линии  $\vec{B}$  связаны с направлением тока в соленоиде правилом правого буравчика (см. рис. 4.9).

*2 этап.* Выбираем контур ( $l$ ) в виде прямоугольника 1–2–3–4–1, одна из сторон которого параллельна оси соленоида и располагается внутри него. Рассчитаем циркуляцию вектора  $\vec{B}$  по этому контуру ( $l$ )

$$\int_{(l)} B dl \cos \alpha = \int_1^2 B dl \cos 0^\circ + \int_2^3 B dl \cos 90^\circ + \int_3^4 B dl \cos \alpha + \int_4^1 B dl \cos 90^\circ =$$

$$= B \int_1^2 dl = B \cdot l,$$

где  $l$  — длина стороны 1–2 контура; на сторонах контура 2–3, 3–4 и 4–1 интеграл обращается в ноль, так как внутри соленоида  $\alpha = 90^\circ$ , а за его пределами  $B = 0$ .

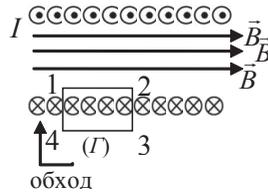


Рис. 4.9

*3 этап.* Рассчитаем сумму токов, охватываемых контуром:

$$\sum I_i = N \cdot I,$$

где  $N$  — число витков на стороне контура 1–2. Выбираем знак плюс, так как направление тока и обхода контура связаны правилом правого буравчика.

*4 этап.* Из теоремы о циркуляции найдем модуль вектора  $\vec{B}$ :

$$B \cdot l = \mu \mu_0 N I \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \mu \mu_0 n I,$$

где  $n = N/l$  — число витков на единицу длины соленоида.

Полученная формула применима также и для расчета модуля  $\vec{B}$  магнитного поля внутри длинного соленоида — соленоида, у которого длина значительно превышает диаметр  $D$  витков ( $l \gg D$ ).

**Пример 2.** Магнитное поле тороида.

Тороид представляет собой проводник, навитый на каркас в виде тора (см. рис. 4.10).

*1 этап.* Из симметрии задачи следует, что магнитное поле существует только внутри тороида. Линии вектора  $\vec{B}$  представляют собой

окружности с центром в т.  $O$  (рис. 4.10), их направление связано с направлением тока в тороиде правилом правого буравчика. Вектор  $\vec{B}$  направлен по касательной к линиям  $\vec{B}$ .

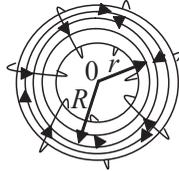


Рис. 4.10

*2 этап.* Выбираем контур ( $\Gamma$ ), совпадающий с линией  $\vec{B}$  радиуса  $r$ , направление обхода контура возьмем по часовой стрелке. Рассчитаем циркуляцию вектора  $\vec{B}$  по этому контуру ( $\Gamma$ )

$$\oint_{(\Gamma)} B dl \cos \alpha = B \oint_{(\Gamma)} dl \cos 0 = B \cdot 2\pi r .$$

*3 этап.* Рассчитаем сумму токов, охватываемых контуром ( $\Gamma$ ):

$$\sum I_i = N \cdot I ,$$

где  $N$  — число витков тороида.

*4 этап.* Найдем модуль вектора  $\vec{B}$ :

$$B \cdot 2\pi r = \mu\mu_0 NI ,$$

$$B = \mu\mu_0 nI \cdot R / r ,$$

где  $n = N / (2\pi R)$  — число витков, приходящихся на единицу длины тороида;  $R$  — радиус окружности, проходящей через центры витков тороида.

Если диаметр  $D$  витков тороида значительно меньше  $R$  ( $D \ll R$ ), то тогда можно считать, что  $r \approx R$  и записать

$$B = \mu\mu_0 nI .$$

## 4.2. Закон Ампера. Сила Ампера, действующая на прямолинейный проводник с током в однородном поле

Если элемент тока  $Id\vec{l}$  поместить в магнитное поле, то со стороны магнитного поля на него действует сила  $d\vec{F}$ , величина которой определяется соотношением

$$d\vec{F} = [Id\vec{l} \times \vec{B}], \quad dF = BIdl \sin \alpha, \quad \alpha = \left( d\vec{l} \wedge \vec{B} \right). \quad (4.14)$$

Формула (4.14) представляет собой *закон Ампера*, определяющий силу, которая действует на элемент тока со стороны магнитного поля.

Направление силы  $d\vec{F}$  может быть найдено по общему правилу векторного произведения, из которого следует правило левой руки: если расположить ладонь левой руки так, чтобы вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}$  входил в ладонь, а четыре вытянутых пальца совпадали с направлением элемента тока  $Id\vec{l}$ , отставленный большой палец укажет направление силы Ампера.

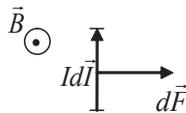


Рис. 4.11

Сила Ампера, действующая в магнитном поле на проводник конечной длины  $l$  с током  $I$ , равна геометрической сумме сил Ампера, действующих на все малые элементы этого проводника:

$$\vec{F} = I \int_{(l)} [d\vec{l} \times \vec{B}]. \quad (4.15)$$

В частности, если проводник прямолинейный, а магнитное поле однородно, то из формулы (4.14) получается выражение:

$$F = BIl \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между направлением тока (вектором плотности тока) в проводнике и вектором индукции магнитного поля.

### 4.3. Поведение контура с током в магнитном поле

Магнитное поле оказывает ориентирующее действие на замкнутый проводящий контур, по которому идет постоянный электрический ток.

Для того чтобы описать поведение контура с током в магнитном поле, введем понятие его *магнитного момента*  $\vec{p}_m$ . Магнитный момент — это вектор, перпендикулярный к плоскости контура, направление которого связано с направлением тока в контуре правилом правого буравчика (рис. 4.12).

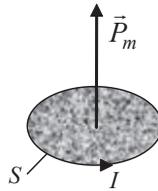


Рис. 4.12

Модуль вектора  $\vec{p}_m$  равен

$$p_m = IS, \quad (4.16)$$

где  $S$  — площадь контура;  $I$  — сила тока, текущего по нему. Поведение контура с током в магнитном поле полностью определяется его магнитным моментом  $\vec{p}_m$ .

Рассмотрим поведение контура с током в однородном магнитном поле. На рис. 4.13, *a* показан прямоугольный контур, помещенный в однородное магнитное поле. При пропускании постоянного тока через контур под действием пары одинаковых по модулю сил ( $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{34}$ ) контур поворачивается, при этом на контур действует механический вращающий момент

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}], \quad M = p_m B \sin \alpha, \quad (4.17)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ . Вращение контура происходит вокруг вертикальной оси, перпендикулярной как  $\vec{B}$ , так и  $\vec{p}_m$ . Вектор вращающего момента  $\vec{M}$  откладывается вдоль оси вращения так, чтобы из его конца вращение контура под действием пары сил было вид-

но происходящим против часовой стрелки. На рис. 4.13, б вектор  $\vec{M}$  направлен «к нам» (из-за чертежа перпендикулярно его плоскости).

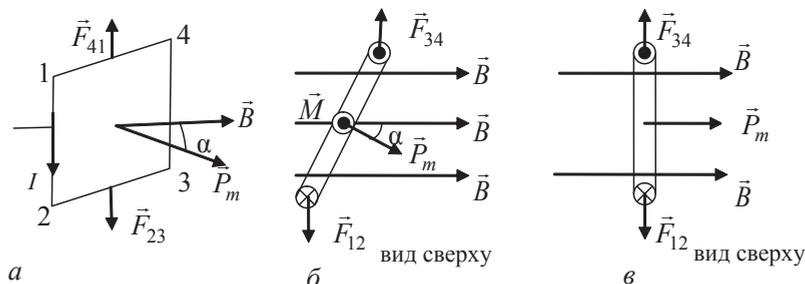


Рис. 4.13

Поворот контура происходит до тех пор, пока вектор магнитного момента не установится параллельно линиям индукции магнитного поля (рис. 4.13, в). Это положение является положением устойчивого равновесия, ему соответствует минимальное значение потенциальной энергии  $W_p$  контура с током в магнитном поле, величина которой определяется соотношением

$$W_p = -IBS \cos \alpha = -(IS)B \cos \alpha = -p_m B \cos \alpha = -(\vec{p}_m \vec{B}),$$

$$W_p = -(\vec{p}_m \vec{B}) = -\vec{p}_m B \cos \alpha, \quad \alpha = \left( \vec{p}_m, \vec{B} \right). \quad (4.18)$$

Если  $\alpha = 0$ , то  $W_p = -p_m B$ , т.е. принимает минимальное значение.

#### 4.4. Сила Лоренца.

##### Движение заряженной частицы в магнитном поле

*Сила Лоренца* — сила, действующая со стороны магнитного поля на движущуюся в нем заряженную частицу.

$$\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}], \quad F_L = |q|vB \sin \alpha, \quad \alpha = \left( \vec{v}, \vec{B} \right). \quad (4.19)$$

Направление силы Лоренца определяется по правилу векторного произведения или левой руки (для положительно заряженной частицы) (см. рис. 4.2, в): левая ладонь располагается так, чтобы линии индукции магнитного поля входили в ладонь, четыре вытянутых пальца направлены по вектору скорости частицы, тогда отогнутый на  $90^\circ$  большой палец указывает направление силы Лоренца, действующей на положительную частицу (рис. 4.14). Если частица отрицательная, то направление вектора силы Лоренца меняет направление на противоположное.

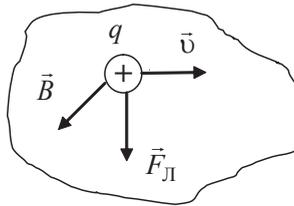


Рис. 4.14

Сила Лоренца  $\vec{F}_L$  работы не совершает, так как угол между ней и скоростью  $\vec{v}$  частицы равен  $90^\circ$  (в любой момент времени мощность силы Лоренца равна нулю:  $N = F_L v \cos 90^\circ = 0$ ). Это означает, что в магнитном поле модуль скорости частицы и ее кинетическая энергия остаются постоянными, изменяется только направление скорости движения частицы.

Рассмотрим частные случаи движения частицы в *однородном магнитном поле*.

а)  $\alpha = 0^\circ$ . В этом случае  $F_L = 0$ , магнитное поле не влияет на движение частицы, при этом частица движется прямолинейно и равномерно вдоль линий вектора  $\vec{B}$  (рис. 4.15, а),

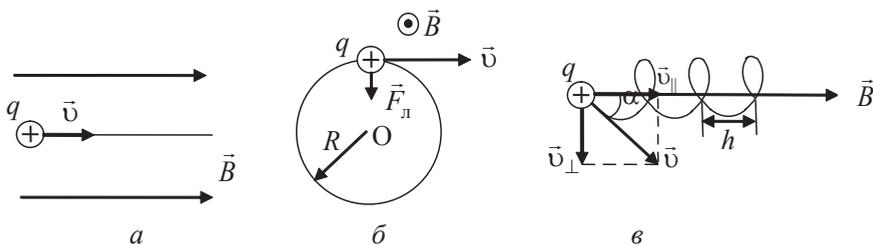


Рис. 4.15

б)  $\alpha = 90^\circ$ . Частица движется в магнитном поле перпендикулярно линиям вектора  $\vec{B}$ . Сила направлена перпендикулярно вектору скорости и сообщает частице центростремительное ускорение. Траектория движения частицы — окружность радиуса  $R$  (см. рис. 4.15, б).

Согласно второму закону Ньютона

$$F_{\perp} = ma_n, \Rightarrow |q|vB = m \frac{v^2}{R},$$

отсюда радиус окружности, по которой движется частица, определяется выражением:

$$R = \frac{mv}{|q|B}. \quad (4.20)$$

Период обращения частицы по окружности:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{|q|B}. \quad (4.21)$$

Как следует из формулы (4.21), период  $T$  не зависит от скорости движения частицы.

в)  $\alpha$  — произвольный угол. Разложим вектор скорости частицы на две составляющие:  $\vec{v}_{\parallel}$  — направленную вдоль линий магнитной индукции и  $\vec{v}_{\perp}$  — перпендикулярную этим линиям. Модули составляющих равны соответственно:

$$v_{\parallel} = v \cos \alpha, \quad v_{\perp} = v \sin \alpha. \quad (4.22)$$

Траектория движения частицы — винтовая линия (см. рис. 4.15, в). В этом случае движение частицы можно представить как сумму двух видов движения — прямолинейного равномерного вдоль линий  $\vec{B}$  ( $\alpha = 0^\circ$ ) и движения по окружности в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{B}$  ( $\alpha = 90^\circ$ ).

Для параметров винтовой линии — радиуса  $R$  окружности, периода  $T$  обращения и шага  $h$  винтовой линии (см. рис. 4.15, в) можно записать

$$R = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}, \quad T = \frac{2\pi m}{|q|B}, \quad h = v_{\parallel}T. \quad (4.23)$$

В неоднородном магнитном поле частица в общем случае будет двигаться по винтовой линии, радиус и шаг которой будут изменяться, т. е. по спирали.

Для частного случая, приведенного на рис. 4.16, а, при движении частицы вдоль оси  $Ox$  модуль вектора  $\vec{B}$  увеличивается и согласно формулам (4.29) радиус  $R$  и шаг винтовой линии  $h$  будут уменьшаться.

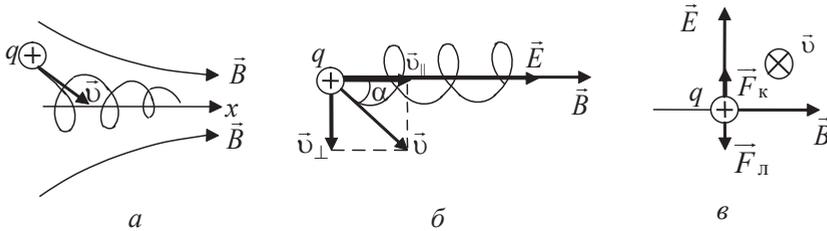


Рис. 4.16

В совмещенных в пространстве электрическом и магнитном полях на частицу, кроме силы Лоренца, будет также действовать кулоновская сила

$$\vec{F} = \vec{F}_k + \vec{F}_l = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}].$$

Из формулы (4.23) следует, что в однородных электрическом и магнитном полях, когда вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  будут параллельны, траектория движения частицы представляет собой винтовую линию, у которой радиус  $R$  остается постоянным (модуль  $\vec{v}_\perp$  не изменяется), а шаг  $h$  будет увеличиваться (под действием кулоновской силы модуль  $\vec{v}_\parallel$  будет возрастать, рис. 4.16, б).

В скрещенных под прямым углом однородных электрическом и магнитном полях (см. рис. 4.12, в) заряженная частица будет двигаться равномерно и прямолинейно, если ее вектор скорости  $\vec{v}$  будет направлен от нас в плоскость рисунка, а модуль вектора скорости равен

$$F_l = F_k \Rightarrow |q|vB = |q|E, \quad \Rightarrow v = E/B.$$

### 4.5. Магнитный поток. Теорема Гаусса для вектора $\vec{B}$ . Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

Элементарным магнитным потоком  $d\Phi$  через элементарную площадку  $dS$  называется скалярная физическая величина, равная

$$d\Phi = \vec{B}d\vec{S} = B dS \cos \alpha, \quad \alpha = \left( \vec{B}, \hat{n} \right), \quad (4.24)$$

где  $\alpha$  — угол между вектором  $\vec{B}$  и вектором  $\vec{n}$  нормали к площадке  $dS$  (рис. 4.17, а).

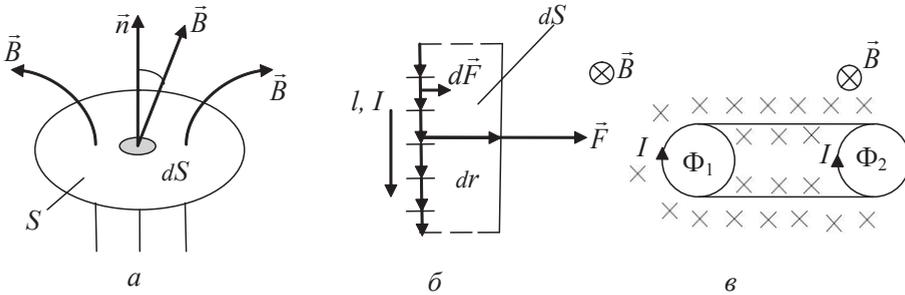


Рис. 4.17

Магнитный поток  $\Phi$  через поверхность  $S$  равен сумме элементарных магнитных потоков  $d\Phi$

$$\Phi = \int d\Phi = \int_S B dS \cos \alpha. \quad (4.25)$$

Линии  $\vec{B}$  проводятся так, чтобы их густота определяла модуль вектора  $\vec{B}$  в данной точке поля. Поэтому согласно формуле (4.25) магнитный поток  $\Phi$  будет пропорционален количеству линий  $\vec{B}$ , пронизывающих поверхность  $S$ .

Как уже отмечалось ранее, линии  $\vec{B}$  являются замкнутыми и поэтому теорема Гаусса в интегральной форме для вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  запишется следующим образом:

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = \oint_S B dS \cos \alpha = 0. \quad (4.26)$$

Физический смысл теоремы Гаусса для вектора  $\vec{B}$  заключается в следующем: в природе нет магнитных зарядов и поэтому линии  $\vec{B}$  являются замкнутыми.

#### 4.6. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

Найдем теперь работу  $dA$ , при которой под действием сил поля прямолинейный проводник перемещается на  $d\vec{r}$  в однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  (см. рис. 4.17, б). Длина проводника  $l$ , по нему протекает ток  $I$ .

Прежде всего, с использованием закона Ампера (см. формулу (4.14)), найдем силу  $\vec{F}$ , действующую на проводник с током со стороны магнитного поля. Для этого разобьем проводник на элементы тока  $I d\vec{l}$ , найдем силы  $d\vec{F}$ , действующие на каждый элемент тока, и затем сложим их

$$\vec{F} = \int d\vec{F}, \quad F = \int dF = \int IBdl \sin 90^\circ = IBl.$$

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = Fdr \cos 0^\circ = IBldr = IBdS = Id\Phi, \quad (4.27)$$

где  $d\Phi$  — элементарный магнитный поток, пронизывающий поверхность  $dS$ , которую описывает проводник при своем движении в магнитном поле.

Работа сил поля на конечном перемещении складывается из работ  $dA$  на малых участках пути

$$A = \int dA = I \int d\Phi = I\Phi, \quad (4.28)$$

где  $\Phi$  — магнитный поток, пронизывающий поверхность, которую описывает проводник при своем движении в магнитном поле. Таким образом, работа сил магнитного поля зависит от пути перехода проводника из начального в конечное состояние.

Другая ситуация возникает при расчете работы  $A$  по перемещению контура с током (см. рис. 4.17, в)

$$A = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} Id\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi, \quad (4.29)$$

где  $\Phi_1, \Phi_2$  — магнитные потоки, пронизывающие плоскость контура в начальном и конечном положениях.

#### 4.7. Эффект Холла в металле

Возьмем металлическую прямоугольную пластинку шириной  $b$  и толщиной  $d$ . Пропустим по ней ток плотностью  $\vec{j}$  и поместим ее в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости пластины (рис. 4.18, а).

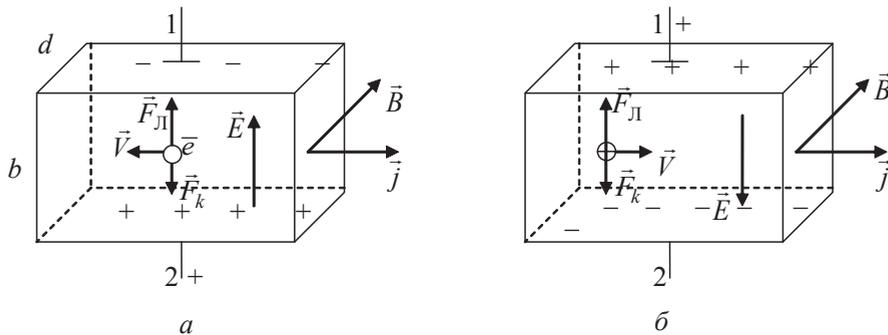


Рис. 4.18

На движущиеся в металле свободные электроны со стороны магнитного поля будет действовать сила Лоренца, которая приведет к движению электронов к верхней грани пластины, она зарядится отрицательно, а нижняя грань — положительно. В результате этого в металле возникает поперечное электрическое поле, напряженность  $\vec{E}$  которого будет перпендикулярна векторам  $\vec{B}$  и  $\vec{j}$ . В возникновении поперечного электрического поля и заключается *эффект Холла*, открытый в 1879 году.

Для разности потенциалов, возникающей между верхней и нижней гранями пластины, в условиях установившегося в поперечном сече-

нии стационарного распределения зарядов можно получить следующее выражение:

$$I = |e|n\upsilon S = |e|n\upsilon bd, \quad \upsilon = \frac{I}{|e|nbd},$$

$$F_x = F_d: \quad |e|E = |e|\upsilon B, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = Eb = B\upsilon b = \frac{IB}{|e|nd};$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = R_x \frac{IB}{d} = R_x j b B. \quad (4.30)$$

Из формулы (4.30) следует, что холловская разность потенциалов определяется толщиной  $d$  пластины в направлении магнитного поля, силой тока и модулем вектора  $\vec{B}$  магнитного поля. Если выразить силу тока через плотность тока, то тогда в формулу (4.30) войдет толщина  $b$  пластины в направлении, перпендикулярном направлению магнитного поля.

Характеристики материала, из которого сделана пластина, входят в выражение (4.30) через постоянную Холла:

$$R_x = \frac{1}{n|e|}, \quad (4.31)$$

где  $n$  — концентрация свободных электронов в металле.

Из экспериментально установленного значения постоянной Холла можно по формуле (4.31) определить концентрацию свободных электронов в металле.

#### 4.8. Магнитное поле в веществе. Характеристики, вводимые для описания магнитного поля в присутствии вещества

Все вещества являются магнетиками, т. е. при помещении их во внешнее магнитное поле  $\vec{B}_0$  они создают свое магнитное поле  $\vec{B}'$ , т. е. намагничиваются,

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}', \quad (4.32)$$

где  $\vec{B}$  — результирующее магнитное поле.

Магнитное поле вещества  $\vec{B}'$  связано с микротоками  $I'$ , обусловленными движением электронов в атомах, ионах и молекулах.

Для однородных и изотропных магнетиков *магнитная проницаемость*  $\mu$  является скалярной величиной, равной

$$\mu = \frac{B}{B_0}, \quad (4.33)$$

т. е. она показывает, во сколько раз индукция магнитного поля при наличии среды отличается от индукции магнитного поля в вакууме.

Также для описания способности вещества создавать свое магнитное поле  $\vec{B}'$  вводится *вектор намагничивания*  $\vec{J}$ . Он равен векторной сумме магнитных моментов  $\vec{p}_{\text{м.ат}_i}$  атомов, которые находятся в единице объема вещества

$$\vec{J} = \frac{\sum_i \vec{p}_{\text{м.ат}_i}}{V}. \quad (4.34)$$

Магнитный момент атома складывается из суммы магнитных моментов электронов, связанных с их орбитальным движением, спиновых магнитных моментов электронов и спинового магнитного момента ядра (из-за большой массы ядра этим моментом обычно пренебрегают). Согласно теории Бора орбитальные магнитные моменты электронов связаны с движением электронов в атоме по круговым орбитам, что приводит к созданию кольцевого тока, который и обладает магнитным моментом. Спиновые магнитные моменты электрона обусловлены тем, что неотъемлемыми свойствами частицы является не только ее масса, заряд, но и спиновый магнитный момент. Его наличие связывалось с вращением частицы вокруг своей оси, но впоследствии это представление оказалось неверным, хотя понятие спинового момента осталось.

Качественно возникновение собственного магнитного поля  $\vec{B}'$  магнетика можно пояснить на основе гипотезы Ампера о существовании внутри молекул молекулярных токов (микротоков). Их ориентация во внешнем магнитном поле и создает не равное нулю магнитное поле  $\vec{B}'$  вещества и соответственно  $\vec{J}$  (см. рис. 4.19, а, в однородном магнитном поле  $\vec{B}_0$  находится однородный длинный стержень в виде цилиндра).

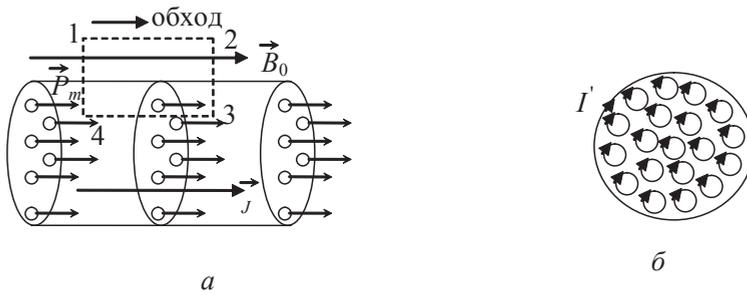


Рис. 4.19

Если  $\vec{B}_0 = 0$ , то тепловое движение разбрасывает молекулярные токи хаотично по всем направлениям и поэтому  $\vec{B}' = 0$ ,  $\vec{J} = 0$ . Во внешнем магнитном поле происходит ориентация магнитных моментов микротоков вдоль поля (магнитные моменты микротоков будут параллельны вектору  $\vec{B}_0$ ). За счет такой ориентации происходит компенсация микротоков внутри стержня, такая компенсация отсутствует на поверхности цилиндра (см. рис. 4.19, б). Вследствие этого магнитное поле цилиндра будет подобно магнитному поля соленоида

$$B' = B_{\text{сол}} = \mu_0 I'_{\text{витка}} \frac{N}{l} = \mu_0 \frac{I'}{l}, \quad (4.35)$$

где  $I'$  — это суммарный поверхностный ток, текущий по поверхности цилиндра на длине  $l$ .

Если учесть, что сумма магнитных моментов атомов в этом случае будет равна магнитному моменту поверхностного тока  $I'$ , то тогда для модуля вектора  $\vec{J}$  можно записать

$$J = \frac{p_{\text{тока}}}{V} = \frac{I'S}{Sl} = \frac{I'}{l}. \quad (4.36)$$

Из формул (4.35) и (4.36) видно, что

$$B' = \mu_0 J, \quad \vec{B}' = \mu_0 \vec{J}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{J}. \quad (4.37)$$

Еще одной характеристикой, вводимой для описания магнитного поля в присутствии вещества, является *вектор напряженности*  $\vec{H}$ . Он вводится по формуле

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}. \quad (4.38)$$

В случае вакуума  $\vec{J} = 0$ ,  $\vec{B} = \vec{B}_0$  и поэтому

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}, \quad \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}. \quad (4.39)$$

Для однородных и изотропных магнетиков из опыта известна следующая формула связи векторов  $\vec{J}$  и  $\vec{H}$ :

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (4.40)$$

где величина  $\chi$  называется *магнитной восприимчивостью вещества*. Для векторов  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$  в случае однородного и изотропного магнетика с учетом формул (4.38)–(4.40) получаются следующие выражения:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H}, \quad \vec{B} = (1 + \chi)\mu_0 \vec{H} = (1 + \chi)\vec{B}_0 = \mu \vec{B}_0, \\ \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad \mu = 1 + \chi. \quad (4.41)$$

## 4.9. Виды магнетиков

Все вещества по магнитным свойствам подразделяются на три группы — диамагнетики, парамагнетики и магнитоупорядоченные вещества (ферро-, антиферро- и ферримагнетики). Рассмотрим эти группы веществ подробнее.

### 4.9.1. Диамагнетики

Это вещества, у которых в отсутствие внешнего магнитного поля магнитный момент атома равен нулю. Для них магнитная восприимчивость не зависит от индукции внешнего магнитного поля, принимает малые по модулю отрицательные значения  $\chi = -(10^{-4} \div 10^{-5})$ , что означает незначительное ослабление внешнего магнитного поля  $\vec{B}_0$  ( $\mu \leq 1$ ) в присутствии диамагнетиков и противоположное направление

векторов  $\vec{B}'$ ,  $\vec{J}$  и вектора  $\vec{B}_0$ . Во внешнем неоднородном магнитном поле диамагнетик будет перемещаться и выталкиваться в область более слабого поля.

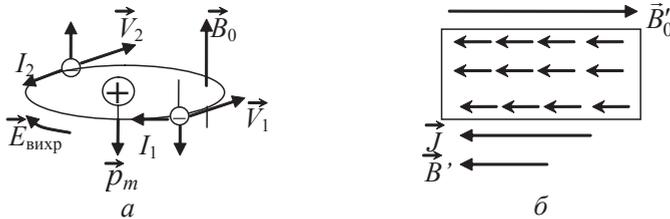


Рис. 4.20

К диамагнетикам относятся инертные газы, металлы Bi, Zn, Cu, Ag, Au, Hg, стекло, мрамор, различные смолы и т. д.

Рассмотрим, что происходит с атомами диамагнетика во внешнем магнитном поле на примере атома гелия. По теории Бора в атоме гелия два электрона движутся с одинаковой скоростью в противоположные стороны по круговой орбите, поэтому их суммарный ток будет равен нулю, следовательно, будет равна нулю и сумма орбитальных магнитных моментов электронов (рис. 4.20, а). Так как спиновые магнитные моменты электронов направлены в противоположные стороны, то их сумма также равна нулю, следовательно, равен нулю и магнитный момент атома:  $\vec{p}_{\text{м.ат}} = 0$ .

При включении внешнего магнитного поля  $\vec{B}_0$  во время его изменения от нуля до  $B_0$  возникающее при этом вихревое электрическое поле  $\vec{E}_B$  совершает работу по увеличению скорости первого электрона и уменьшению скорости второго электрона, и суммарный кольцевой ток будет направлен в сторону первого тока ( $|I_1| > |I_2|$ , рис. 4.20, а). Тогда магнитный момент суммарного тока будет направлен против вектора  $\vec{B}_0$ . Его называют индуцированным магнитным моментом  $\vec{p}_m$ . Их ориентация для атомов диамагнетика, находящегося во внешнем магнитном поле, показана на рис. 4.20, б.

*Диамагнитный эффект* — возникновение индуцированного магнитного момента атома  $\vec{p}_m$ , направленного противоположно внешнему магнитному полю  $\vec{B}_0$ , свойственен всем веществам, но для остальных групп магнетиков он не учитывается ввиду его малости.

### 4.9.2. Парамагнетики

Это вещества, у которых в отсутствие внешнего магнитного поля магнитный момент атома отличен от нуля. Для них магнитная восприимчивость  $\chi$  не зависит от модуля  $\vec{B}_0$  и принимает малые числовые значения  $\chi = -(10^{-3} \div 10^{-2}) > 0$ . Это приводит к незначительному увеличению внешнего магнитного поля в присутствии парамагнетика ( $\mu \geq 1$ ) и параллельности векторов  $\vec{B}'$  и  $\vec{J}$  вектору  $\vec{B}_0$ . Во внешнем неоднородном магнитном поле парамагнетик будет втягиваться в область более сильного поля.

К парамагнетикам относятся щелочные и щелочно-земельные металлы, алюминий (Al), платина (Pt), растворы солей железа, газы азот и кислород, редкоземельные металлы и их соединения и т. д.

Рассмотрим теорию Ланжевена, объясняющую поведение парамагнетиков во внешнем магнитном поле. В этой теории парамагнетик по отношению к магнитным свойствам заменяется газом магнитных стрелок, принимающих участие в тепловом движении. Стрелки моделируют магнитные моменты атомов. В отсутствие внешнего магнитного поля тепловое движение разбрасывает стрелки хаотично по всем направлениям и поэтому  $\vec{B}' = 0$ ,  $\vec{J} = 0$  (рис. 4.21). Во внешнем магнитном поле на магнитные стрелки действуют силы магнитного поля, стремящиеся установить их вдоль линий магнитной индукции. В итоге наблюдается преимущественная ориентация магнитных моментов атомов вдоль линий магнитного поля, появляется намагниченность  $\vec{J}$  парамагнетика (рис. 4.21).

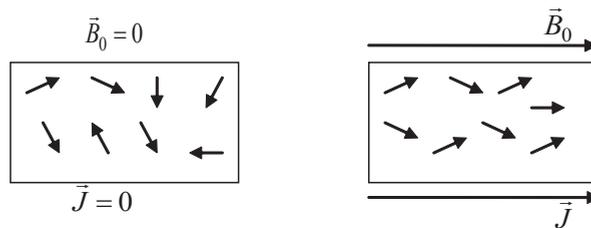


Рис. 4.21

В теории Ланжевена для магнитной восприимчивости справедлив закон Кюри, который определяет зависимость  $\chi$  от температуры

$$\chi = \frac{c}{T}, \quad (4.42)$$

где постоянную величину  $c$  называют постоянной Кюри.

С повышением температуры усиливается фактор теплового движения атомов и поэтому во внешнем магнитном поле фиксированной величины  $\vec{B}_0$  магнитная восприимчивость уменьшается, что и приводит к уменьшению числовых значений векторов  $\vec{B}'$  и  $\vec{J}$ .

### 4.9.3. Ферромагнетики

Группу магнитоупорядоченных веществ составляют вещества, у которых в отсутствие внешнего магнитного поля магнитный момент атома не равен нулю. Для них магнитная проницаемость  $\mu \geq 1000$ , что приводит к значительному увеличению внешнего магнитного поля в присутствии ферромагнетика. К ферромагнетикам относятся такие металлы, как Fe, Co, Ni, Gd, сплавы и соединения этих элементов, и т. д. Перечислим основные особенности ферромагнетиков.

Ферромагнетизм обусловлен спиновыми магнитными моментами атомов. Атомы ферромагнетиков имеют незаполненные внутренние электронные оболочки, что приводит к большим магнитным моментам атомов.

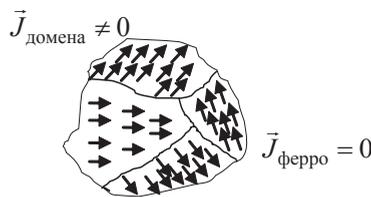


Рис. 4.22

Между магнитными моментами соседних атомов устанавливается обменное взаимодействие, которое приводит к параллельной ориентации магнитных моментов атомов в микрообластях, размерами порядка  $l \approx (10^{-4} \div 10^{-2})$  см, называемых *доменами*. Направления магнитных моментов атомов различных доменов разные, поэтому общая намагниченность ферромагнетика равна нулю (рис. 4.22).

Кривая намагничивания ферромагнетика является нелинейной (рис. 4.23, *a*). Намагниченность ферромагнетика достигает насыщения ( $J$  перестает изменяться с увеличением  $B_0$ ) в слабых магнитных полях.

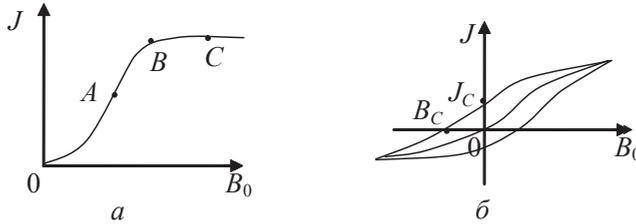


Рис. 4.23

При намагничивании ферромагнетика происходят следующие процессы: 1 этап (*процесс смещения границ*, участок  $OA$  основной кривой намагничивания, рис. 4.23, *a*). На этом участке с увеличением модуля вектора магнитной индукции  $\vec{B}_0$  внешнего магнитного поля происходит рост доменов с выгодной ориентацией магнитных моментов по отношению к направлению внешнего магнитного поля (рис. 4.24). Он сопровождается смещением границ доменов. В конце первого этапа образец становится однодоменным.

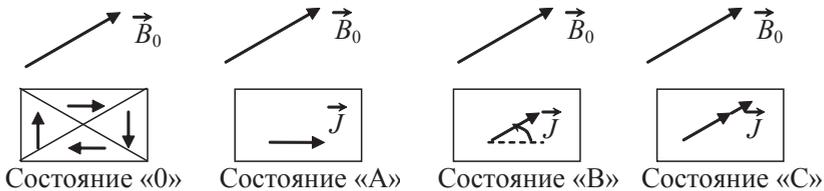


Рис. 4.24

2 этап (*процесс вращения*, участок  $AB$  на кривой на рис. 4.23, *a*). При увеличении модуля вектора  $\vec{B}_0$  на этом участке происходит поворот вектора намагничивания  $\vec{J}$  и он в итоге устанавливается вдоль вектора  $\vec{B}_0$  (рис. 4.24).

3 этап (*парапроцесс*, участок  $BC$  кривой на рис. 4.23, *a*). С увеличением модуля вектора  $\vec{B}_0$  происходит незначительный рост  $J$  за счет ориентации вдоль поля магнитных моментов отдельных атомов, которые за счет теплового движения имели другие направления (рис. 4.24).

Для ферромагнетиков характерно явление *гистерезиса* — зависимость свойств образца от его предшествующих состояний или явление отставания изменения намагниченности от изменения внешнего магнитного поля. Если намагнитить ферромагнетик до насыщения, а затем начать уменьшать внешнее магнитное поле до нуля, то изменение  $J$  будет отставать от изменения  $B_0$  и в отсутствие внешнего магнитного поля ферромагнетик будет обладать остаточной намагниченностью  $J_C$  (см. рис. 4.23, б). Для устранения остаточной намагниченности ( $J_C = 0$ ) необходимо приложить внешнее магнитное поле противоположного направления. Величину модуля вектора магнитной индукции  $B_C$  такого поля называют *коэрцитивной силой*. При дальнейшем увеличении  $B_0$  можно выйти на насыщение и при циклическом изменении  $B_0$  намагниченность ферромагнетика будет описывать кривую, называемую *петлей гистерезиса* (см. рис. 4.23, б).

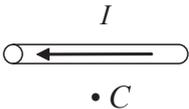
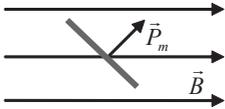
В зависимости от величины коэрцитивной силы  $B_C$  различают магнитомягкие материалы ( $B_C \approx 1$  мкТл, узкая петля гистерезиса, они легко перемагничиваются) и магнито жесткие материалы ( $B_C \approx 1$  мТл, широкая петля гистерезиса, их трудно перемагничить). Магнитомягкие материалы используют для изготовления сердечников трансформаторов, электродвигателей и т. д., т. е. в тех случаях, где потери энергии при перемагничивании таких материалов будут незначительными, а магнито жесткие материалы применяются для изготовления постоянных магнитов.

Для каждого ферромагнетика существует температура, выше которой он теряет свои необычные свойства и становится обычным парамагнетиком. Она получила название — температура Кюри ( $T_C$ ). Для железа и никеля  $T_C$  составляет 1038 К и 641 К соответственно. Магнитная восприимчивость ферромагнетика при температурах выше температуры Кюри  $T > T_C$  подчиняется закону Кюри — Вейса

$$\chi = \frac{c}{T - T_C}, \quad (4.43)$$

где  $c$  — постоянная Кюри — Вейса.

Вопросы и задания для самоконтроля к разделу «Магнетизм»

1. Что называют линиями индукции магнитного поля? Сформулируйте правило, по которому определяется направление линий индукций магнитного поля, созданного прямолинейным проводником с током.
2. Изобразите линии индукции магнитного поля, созданного проводником с током, изображенным на рисунке. Определите направление вектора  $\vec{B}$  магнитной индукции в т.  $C$ .
 
3. Что называют элементом тока? Как направлен вектор элемента тока?
4. Запишите формулу, выражающую закон Био – Савара – Лапласа. Как можно определить направление вектора  $d\vec{B}$ , входящего в этот закон?
5. Как изменяется индукция магнитного поля на оси кольцевого тока по мере удаления от его центра? Запишите формулу, поясняющую ответ.
6. Сформулируйте и запишите теорему о циркуляции вектора магнитной индукции. Для чего применяется эта теорема?
7. Вокруг проводника с током в однородной среде нарисован контур обхода. Контур растягивают так, что охватываемая им площадь увеличивается в полтора раза. Как изменяется при этом значение циркуляции вектора магнитной индукции?
8. Запишите формулу, выражающую закон Ампера. Как определить направление силы, действующей со стороны магнитного поля на элемент тока? Проиллюстрируйте примером.
9. Что называют магнитным моментом контура с током? Как определить направление вектора магнитного момента?
10. Магнитный момент  $\vec{P}_m$  рамки с током направлен так, как показано на рисунке. Рамка с током находится в однородном магнитном поле. Как направлен вращающий момент сил, действующий на рамку со стороны магнитного поля? До каких пор рамка будет поворачиваться?
 

11. Какую силу называют силой Лоренца? Перечислите ее свойства. Запишите формулу для силы Лоренца.
12. Как можно определить направление силы Лоренца? Определите направление силы Лоренца, действующей на положительно заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  (см. рисунок).
13. Сформулируйте определение магнитного потока и запишите соответствующую формулу.
14. В чем заключается физический смысл теоремы Гаусса для вектора магнитной индукции?
15. В чем заключается эффект Холла?

# Оглавление

---

---

Введение .....	3
<b>1. Механика</b> .....	4
1.1. Кинематика движения материальной точки .....	4
1.1.1. Общие понятия .....	4
1.1.2. Система отсчета, радиус-вектор, путь, перемещение, мгновенная скорость движения м. т. ....	5
1.1.3. Мгновенное ускорение м. т. Тангенциальное и нормальное ускорения материальной точки .....	7
1.2. Динамика движения м. т. ....	7
1.2.1. Сила, инертность тела, масса тела .....	8
1.2.2. Законы Ньютона .....	8
1.3. Механическая энергия и работа .....	12
1.3.1. Работа и мощность силы .....	13
1.3.2. Кинетическая энергия тела. Теорема о кинетической энергии .....	14
1.3.3. Потенциальная энергия взаимодействующих тел. Теорема о потенциальной энергии.....	16
1.3.4. Формула, выражающая связь между консервативной силой и градиентом потенциальной энергии .....	19
1.3.5. Механическая энергия системы тел. Закон сохранения и изменения механической энергии .....	20
1.3.6. Применение законов сохранения импульса и механической энергии к анализу абсолютно упругого и неупругого столкновений .....	21
1.4. Кинематика вращательного движения материальной точки и абсолютно твердого тела .....	24
1.4.1. Кинематические характеристики вращательного движения материальной точки и абсолютно твердого тела.....	24

1.4.2. Формулы, выражающие связь между линейными и угловыми характеристиками при вращательном движении .....	26
1.5. Динамика вращательного движения .....	27
1.5.1. Момент инерции м. т. и а. т. т. относительно оси вращения. Теорема Штейнера.....	27
1.5.2. Момент силы относительно оси вращения. Основной закон динамики вращательного движения .....	30
1.5.3. Момент импульса м. т. и а. т. т. относительно оси вращения.....	31
1.5.4. Взаимосвязь между скоростью изменения момента импульса и моментом силы .....	33
1.5.5. Закон сохранения момента импульса .....	33
1.6. Работа и энергия при вращательном движении .....	35
1.6.1. Кинетическая энергия вращающегося а. т. т. ....	35
1.6.2. Работа внешних сил по вращению абсолютно твердого тела.....	37
Вопросы и задания для самоконтроля к разделу «Механика» .....	37
<b>2. Основы молекулярной физики .....</b>	<b>40</b>
2.1. Статистический и термодинамический методы описания свойств макроскопических систем.....	40
2.2. Функция распределения Максвелла и ее применение .....	42
2.2.1. Понятие о функции распределения Максвелла (функции распределения молекул идеального газа по модулю скорости молекул) .....	42
2.2.2. Функция распределения молекул идеального газа по кинетическим энергиям поступательного движения молекул .....	46
2.2.3. Средние характеристики молекул.....	47
2.2.4. Молекулярно-кинетический смысл температуры .....	48
2.2.5. Основное уравнение МКТ идеального газа для давления .....	49
2.3. Барометрическая формула.....	51
2.4. Распределение Больцмана .....	52
2.5. Экспериментальная проверка распределения молекул по модулю скорости. Опыт Ламмерта.....	53
2.6. Опыты Перрена по определению постоянной Авогадро .....	55
2.7. Основные понятия равновесной термодинамики .....	56

2.8. Число степеней свободы молекулы. Закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы .....	57
2.9. Внутренняя энергия системы, работа, теплообмен.....	60
2.9.1. Внутренняя энергия системы.....	60
2.9.2. Работа в термодинамике.....	61
2.9.3. Теплообмен, теплоемкость системы.....	62
2.10. Первый закон термодинамики и его применение к различным процессам.....	63
2.10.1. Первое начало термодинамики.....	63
2.10.2. Применение первого начала термодинамики к различным процессам .....	63
2.10.3. Зависимость теплоемкости системы от вида процесса. Уравнение Майера .....	65
2.11. Второе начало термодинамики.....	66
2.11.1. Некоторые формулировки второго начала термодинамики .....	66
2.11.2. Энтропия в термодинамике.....	67
2.11.3. Расчет изменения энтропии для изопроцессов.....	68
2.11.4. Примеры расчета изменения энтропии для неравновесных процессов .....	71
2.11.5. Термодинамическая вероятность. Статистический смысл понятия энтропии .....	72
2.11.7. Флуктуации .....	73
2.12. Третье начало термодинамики .....	76
2.13. Тепловые двигатели. Идеальный тепловой двигатель.....	76
Вопросы и задания для самоконтроля к разделу «Молекулярная физика и термодинамика».....	78
<b>3. Электричество .....</b>	<b>80</b>
3.1. Электростатика .....	80
3.1.1. Электрический заряд. Закон Кулона.....	80
3.1.2. Вектор напряженности $\vec{E}$ электростатического поля, расчет $\vec{E}$ для электростатического поля точечного заряда .....	82
3.1.3. Принцип суперпозиции электростатических полей. Расчет $\vec{E}$ для электрического поля диполя и на оси равномерно заряженного кольца.....	83
3.1.4. Силовые линии электростатического поля .....	86
3.1.5. Поток вектора $\vec{E}$ электростатического поля. Теорема Гаусса – Остроградского для вектора $\vec{E}$ .....	88

3.1.6. Применение теоремы Гаусса – Остроградского для расчета электростатических полей .....	90
3.1.7. Потенциальная энергия взаимодействия точечных зарядов. Потенциальный характер электростатического поля .....	95
3.1.8. Потенциал $\varphi$ электростатического поля. Расчет $\varphi$ для электростатического поля точечного заряда .....	96
3.1.9. Принцип суперпозиции для потенциала. Расчет потенциала для электрического поля диполя и на оси равномерно заряженного кольца.....	98
3.1.10. Работа сил электрического поля. Разность потенциалов. Формула связи вектора $\vec{E}$ и потенциала $\varphi$ .....	100
3.1.11. Примеры вычисления разности потенциалов .....	101
3.1.12. Эквипотенциальные поверхности .....	103
3.1.13. Циркуляция вектора $\vec{E}$ электростатического поля. Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$ электростатического поля.....	104
3.1.14. Распределение избыточного заряда на проводниках в состоянии равновесия .....	105
3.1.15. Незаряженный проводник во внешнем электрическом поле .....	107
3.1.16. Емкость уединенного проводника. Емкость конденсатора .....	108
3.1.17. Энергия заряженного проводника и конденсатора. Энергия электростатического поля. Объемная плотность энергии электростатического поля.....	111
3.2. Постоянный электрический ток .....	113
3.2.1. Сила тока, плотность тока.....	113
3.2.2. Закон Ома для однородного участка цепи в дифференциальной форме .....	116
3.2.3. Зависимость удельного сопротивления проводника от температуры. Сверхпроводимость.....	117
3.2.4. Сопротивление проводника. Закон Ома для однородного участка цепи в интегральной форме .....	119
3.2.5. Закон Джоуля – Ленца в интегральной и дифференциальной форме.....	120
3.2.6. Электродвижущая сила источника тока. Закон Ома для неоднородного участка цепи.....	121

3.2.7. Правила Кирхгофа.....	124
Вопросы и задания для самоконтроля к разделу «Электричество» .....	126
<b>4. Магнетизм .....</b>	<b>129</b>
4.1. Магнитное поле и его характеристики.....	129
4.1.1. Магнитное поле. Опытные данные по обнаружению магнитного поля.....	129
4.1.2. Магнитное взаимодействие движущихся зарядов в вакууме .....	130
4.1.3. Вектор индукции магнитного поля. Линии магнитной индукции. Принцип суперпозиции..	132
4.1.4. Элемент тока. Закон Био – Савара – Лапласа (БСЛ) ...	134
4.1.5. Примеры применения закона Био – Савара – Лапласа к расчету магнитных полей различных проводников с электрическим током .....	135
4.1.6. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции $\vec{B}$ .....	138
4.1.7. Применение теоремы о циркуляции вектора $\vec{B}$ к расчету магнитных полей проводников с током .....	140
4.2. Закон Ампера. Сила Ампера, действующая на прямолинейный проводник с током в однородном поле ...	143
4.3. Поведение контура с током в магнитном поле .....	144
4.4. Сила Лоренца. Движение заряженной частицы в магнитном поле .....	145
4.5. Магнитный поток. Теорема Гаусса для вектора $\vec{B}$ . Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле .....	149
4.6. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле .....	150
4.7. Эффект Холла в металле .....	151
4.8. Магнитное поле в веществе. Характеристики, вводимые для описания магнитного поля в присутствии вещества .....	152
4.9. Виды магнетиков.....	155
4.9.1. Диамагнетики .....	155
4.9.2. Парамагнетики .....	157
4.9.3. Ферромагнетики .....	158
Вопросы и задания для самоконтроля к разделу «Магнетизм» .....	161

*Учебное издание*

**Повзнер Александр Александрович**  
**Андреева Анна Григорьевна**  
**Шумихина Кямаля Арифовна**

**ФИЗИКА**  
**Базовый курс**  
**Часть I**

Редактор Н. П. Кубыщенко  
Верстка О. П. Игнатъевой

Подписано в печать 24.02.2016. Формат 70×100/16.  
Бумага писчая. Плоская печать. Гарнитура Newton.  
Уч.-изд. л. 8,8. Усл. печ. л. 13,5. Тираж 100 экз.  
Заказ 53

Издательство Уральского университета  
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ  
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5  
Тел.: 8(343)375-48-25, 375-46-85, 374-19-41  
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ  
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4  
Тел.: 8(343) 350-56-64, 350-90-13  
Факс: 8(343) 358-93-06  
E-mail: press-urfu@mail.ru



